



# Instabilités et sources locales de turbulence dans les disques d'accrétion

Geoffroy Lesur

## ► To cite this version:

Geoffroy Lesur. Instabilités et sources locales de turbulence dans les disques d'accrétion. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2007. Français. NNT: . tel-00166016

**HAL Id: tel-00166016**

**<https://theses.hal.science/tel-00166016>**

Submitted on 31 Jul 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE  
présentée par

**Geoffroy LESUR**

pour obtenir le diplôme de Docteur en sciences de l'Université Joseph-Fourier

(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : ASTROPHYSIQUE – PHYSIQUE & MILIEUX DILUÉS

---

## **Instabilités et sources locales de turbulence dans les disques d'accrétion**

---

Soutenue publiquement le 7 Juin 2007  
devant le jury composé de

M. Steven BALBUS	Rapporteur
M. Bernard CASTAING	Examineur & Président
M. François LIGNIÈRES	Examineur
M. Pierre-Yves LONGARETTI	Codirecteur de Thèse
M. Guy PELLETIER	Directeur de Thèse
M. Jean-Paul ZAHN	Rapporteur

---

Thèse préparée au sein de l'Équipe



*Laboratoire d'AstrOphysique de Grenoble*

UMR-5571 (OSUG/UJF/CNRS), BP 53, F-38041 Grenoble Cedex 9



Geoffroy LESUR

**Disques d'accrétion, méthodes numériques,  
théorie de la turbulence, MHD.**

Thèse de doctorat — Université Grenoble I (Joseph-Fourier)

— Juin 2007 —



## Remerciements

Nous y voilà, la boucle est bouclée, et me voici en train d'écrire les dernières lignes de ce manuscrit. Ce dernier « chapitre » me donne l'occasion de me remémorer les moments d'espoirs, de succès mais aussi de doutes et de vide qui ont ponctué ces trois années. Nul doute que la recherche est très loin d'être un fleuve tranquille ! Je me lance donc, la main hésitante et le cœur battant (sortez vos kleenex), dans la tâche probablement la plus ardue de ce manuscrit : n'oublier personne...

Je vais donc commencer par remercier Steve Balbus et Jean-Paul Zahn, qui ont tous deux accepté d'être rapporteurs de cette thèse, et d'écrire un rapport en un temps relativement court. Je remercie également Bernard Castaing et François Lignières d'avoir participé à mon Jury en tant qu'examineurs, et ce malgré des thèmes de recherche relativement différents de ceux qui m'ont intéressés dans ce manuscrit.

Une mention spéciale pour mon directeur de thèse, Guy, dont la bonne humeur et le dynamisme resteront pour moi un exemple à suivre... Bien naturellement, ce travail n'aurait jamais pu aboutir sans Pierre-Yves. Je me rappellerai longtemps des discussions à bâtons rompus que nous pouvions avoir tout au long de cette thèse, et des idées qui pouvaient surgir subitement de nos approches souvent contradictoires. Mais je voudrais aussi souligner son humour, sa gentillesse, et simplement son amitié, qui ont permis d'instaurer un climat de confiance durant ces trois ans (et même au delà !).

Je voudrais bien évidemment remercier tout ceux que j'ai eu l'occasion de côtoyer pendant ces trois années, en particulier l'équipe Sherpas. Jon, Pop (ta crème solaire?), Gilles, Guillaume D., Peggy, Didier, merci à vous pour votre aide, votre humour et les discussions sur tout et rien que l'on a pu avoir. Je retiendrai de cette équipe les fameuses journées Sherpas où la preuve est faite que l'on peut faire de la théorie en restant bon enfant... Mes collègues de galère ont aussi leur place ici, Timothé (Titi pour les intimes, mais n'en abusez pas) qui formait avec moi la « dream team » du deuxième étage, mais aussi Clément, Philippe, Rémi, Nicolas B., Nicolas C., Nicolas T., Vanessa, Yaël ainsi que l'équipe des postdoc (et quelle équipe !) Cédric, Céline, Claudio et Gareth.

Mon travail ayant nécessité des moyens informatiques assez importants, j'ai souvent lancé des appels de détresse au service info du Laog, et je remercie donc Ginette, Richard, Françoise R., Françoise B., Frédéric et Sylvain pour leur aide précieuse. Un merci aussi à l'équipe administrative du Laog, Khadidja, Françoise B., Hélène et Valérie qui m'ont permis d'avancer dans le dédale de l'administration. Enfin, je remercie Pierre V., Catherine N., Laurent T. pour leur bonne humeur et leurs conseils avisés dans les couloirs ou autour d'un verre.

Enfin, à tous ceux que j'ai pu oublier et que j'ai côtoyé durant ces quelques années, un grand Merci à vous.

Je terminerai cette désormais relativement longue liste de remerciements par Sylvène, pour sa présence et son soutien dans les moments difficiles, ou tout simplement son amour. Elle aura su m'extirper de mon monde cartésien et me montrer que certaines choses peuvent rester inexplicables et irrationnelles tout en étant passionnantes. . . Je remercie aussi ma Mère, mon Père et Auguste, pour leur amour, leur attention et tous ces petits riens qui en fin de compte forment un Tout. À Vous, simplement, Merci.

Finalement, je souhaite dédier ce manuscrit à mon grand-père, disparu avant d'avoir pu voir ce projet arriver à son terme. Je me rappellerai de ces discussions nocturnes sur les étoiles, l'Univers et la Science en générale, qui m'ont poussées, depuis longtemps déjà, dans les couloirs sinueux de l'astrophysique. . .

*À mon grand-père, Bobby,*





# Table des matières

<b>Remerciements</b>	i
<b>Table des matières</b>	x
<b>Table des figures</b>	xi
<b>Liste des tableaux</b>	xix
 <b>Partie 1. INTRODUCTION</b>	 1
<b>CHAPITRE 1. Des disques d'accrétion dans l'univers?</b>	3
1. Qu'est-ce qu'un disque d'accrétion?	3
§ 1. Le moment cinétique dans l'univers	3
§ 2. Formation de disques d'accrétion dans l'univers : entre théorie et observation	5
2. Le problème du transport du moment angulaire	8
§ 3. Différents processus de transport	8
§ 4. Sources de turbulence dans les disques	10
§ 5. Contraintes observationnelles et théoriques sur l'efficacité du transport	11
3. Objectifs de cette Thèse	12
<b>CHAPITRE 2. Modèle physique et approximations</b>	13
1. Modèle à un fluide	13
§ 6. Les équations de la magnétohydrodynamique	14
§ 7. Application des équations MHD à la physique des disques d'accrétion	19
2. Modèle local, approximation de Hill	21
§ 8. Nécessité d'un modèle local	21
§ 9. Développement des équations locales	22
§ 10. Equilibre vertical, compressibilité	23
3. Méthodologie	24
 <b>Partie 2. MÉTHODES NUMÉRIQUES</b>	 27
<b>CHAPITRE 3. Les approches numériques en mécanique des fluides</b>	29
1. Bases de l'intégration numérique	29
§ 11. Introduction	29
§ 12. Équation modèle	30
2. Méthodes à discrétisation spatiale	31
§ 13. Approche des différences finies	31
§ 14. Approche des volumes finis	32
§ 15. Approche particulière	33

3. Approche spectrale	34
4. Quelles méthodes pour quelles simulations?	35
<b>CHAPITRE 4. Méthodes aux différences finies</b>	<b>37</b>
1. Fondements	38
§ 16. Introduction	38
§ 17. Développement de Taylor	38
2. Un cas d'école (ou presque?) : L'équation linéaire d'advection	39
§ 18. Schéma temporel d'Euler	39
§ 19. Schémas de Runge-Kutta	42
§ 20. Intérêt des formules d'ordre élevés	43
§ 21. Advection d'une discontinuité	45
§ 22. Conclusions	46
3. Transport non linéaire	48
§ 23. L'équation de Burgers	48
4. Implémentation d'un code hydrodynamique aux différences finies	49
§ 24. Équations	49
§ 25. Conditions aux limites	49
§ 26. Tests	52
5. Magnétohydrodynamique	53
§ 27. Le problème de la divergence de $B$	53
§ 28. Choix de Jauge	54
6. Parallélisation	55
§ 29. Choix d'une méthode de parallélisation	55
§ 30. Décomposition de domaine	56
<b>CHAPITRE 5. Méthodes spectrales</b>	<b>59</b>
1. Fondements	59
§ 31. Présentation générale des méthodes spectrales	60
§ 32. Base de Fourier	60
2. L'équation d'advection	62
§ 33. Stabilité et condition CFL	62
§ 34. Test d'advection	62
3. Non linéarités et méthodes spectrales	63
§ 35. Méthodes pseudo-spectrales	63
§ 36. Repliement spectral et dealiasing	64
4. Traitement du cisaillement	66
§ 37. Système de coordonnées cisillées	66
§ 38. Procédure de remappage	67
<b>Partie 3. INSTABILITÉ SOUS-CRITIQUE HYDRODYNAMIQUE</b>	<b>73</b>
<b>CHAPITRE 6. Instabilité sous-critique en mécanique des fluides</b>	<b>75</b>
1. Instabilités et turbulence	75
§ 39. Définitions	75

§ 40. Dynamique de la turbulence : le modèle de Kolmogorov	79
§ 41. Un modèle phénoménologique d'instabilité non linéaire	80
2. Exemple d'instabilité sous-critique : l'écoulement de Couette	83
§ 42. Présentation	83
§ 43. Mécanisme d'auto-entretien dans l'écoulement de Couette plan	84
<b>CHAPITRE 7. Instabilité sous-critique dans les disques d'accrétion</b>	89
1. Turbulence sous-critique dans les disques : pourquoi faire?	89
2. Écoulements expérimentaux	90
§ 44. Intérêt des expériences	90
§ 45. Écoulements de Couette-Taylor	90
§ 46. Équations du mouvement	91
§ 47. Quantités caractéristiques	92
§ 48. Nombres sans dimension	92
§ 49. Stabilité linéaire	93
3. Résultats	94
§ 50. Résultats expérimentaux	94
§ 51. Résultats numériques	98
4. Conclusion	100
<b>CHAPITRE 8. Efficacité de la turbulence sous-critique</b>	101
1. Résultats	102
§ 52. Rôle de la dissipation	102
§ 53. Transport et instabilité non linéaire	106
2. Discussion	108
§ 54. Convergence numérique	108
§ 55. Comparaison avec les résultats antérieurs	112
§ 56. Conditions aux limites et rapport d'aspect	114
§ 57. Conditions initiales	115
§ 58. Circulation d'Ekman	117
3. Conclusions	118
<b>Partie 4. INSTABILITÉ STRATO-ROTATIONNELLE</b>	121
<b>CHAPITRE 9. Instabilité strato-rotationnelle</b>	123
1. Instabilité et stratification	124
§ 59. Présentation	124
§ 60. Équations de base	125
§ 61. Domaines de résolution	128
2. Solutions Exponentielles	129
§ 62. Nature des solutions et conditions aux limites	129
§ 63. Résultats	131
3. Solutions Oscillantes	133
§ 64. Décomposition en domaines	133
§ 65. Raccordement asymptotique	134
§ 66. Dérivation d'une relation de dispersion	135

§ 67. Approche numérique de la relation de dispersion	137
4. Simulations Numériques	139
§ 68. Saturation et conditions aux limites	139
5. Discussion	140
§ 69. Article de Dubrulle <i>et al.</i> (2005b)	140
§ 70. Conclusion	141
<b>Partie 5. INSTABILITÉ MAGNÉTO-ROTATIONNELLE</b>	<b>143</b>
<b>CHAPITRE 10. Champ magnétique et stabilité des disques</b>	<b>145</b>
1. Une instabilité MHD dans les disques?	145
§ 71. Origines	145
§ 72. Description phénoménologique	146
2. Analyse linéaire en présence d'un champ magnétique vertical	147
§ 73. Dérivation d'une relation de dispersion pour les modes axisymétriques	147
§ 74. Nombres sans dimensions	149
§ 75. Limite sans dissipation	150
§ 76. MRI avec dissipation	152
§ 77. Conclusion	157
<b>CHAPITRE 11. Etude numérique de l'instabilité magnéto-rotationnelle</b>	<b>159</b>
1. Méthodologie	159
§ 78. Sens physique des simulations	159
§ 79. Définition d'une viscosité turbulente	161
§ 80. Méthode numérique	163
2. Influence du champ magnétique sur la saturation	165
§ 81. Dépendance générale $\alpha(\beta)$	165
§ 82. Limite en champ magnétique fort	165
§ 83. Bouffées turbulentes : phénomène physique ou numérique?	168
3. Influence de la dissipation sur la saturation	169
§ 84. Rôle du nombre de Prandtl	169
§ 85. Comparaison avec le taux de croissance linéaire	171
§ 86. Analyse spectrale	172
4. Cas sans champ magnétique vertical imposé	174
§ 87. Effets dissipatifs et existence de la turbulence	174
5. Conclusion	175
<b>Partie 6. CONCLUSION ET PERSPECTIVES</b>	<b>177</b>
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>179</b>
<b>Partie 7. ANNEXES</b>	<b>181</b>
<b>ANNEXE A. L'approximation de Hill</b>	<b>185</b>
1. Dérivation du modèle local de Hill	185
§ 88. Pression et tension magnétique	185

§ 89. Développement des équations en coordonnées cylindriques	185
§ 90. Approximations	186
<b>ANNEXE B. Quelques formules d'intégration numérique</b>	189
1. Formules aux différences finies	189
§ 91. Formules centrées	189
§ 92. Formules upwind	190
2. Algorithme de Runge-Kutta	190
<b>ANNEXE C. Relation de dispersion des modes exponentielles de la SRI.</b>	193
§ 93. Dérivation de la relation de dispersion	193
<b>ANNEXE D. Publications</b>	195
1. On the relevance of subcritical hydrodynamic turbulence to accretion disk transport	195
2. Impact of dimensionless numbers on the efficiency of MRI-Induced turbulent transport	217
<b>Partie 8. BIBLIOGRAPHIE</b>	231
<b>Bibliographie</b>	233



## Table des figures

1	Détail d'un nuage interstellaire en effondrement gravitationnel (nébuleuse d'Orion). On y remarque les premiers globules gazeux denses qui donneront des protoétoiles. (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)	4
2	Vue d'artiste d'un disque d'accrétion autour d'une étoile jeune. (Crédit David Darling)	5
3	Tore de gaz au cœur de la galaxie NGC4261. La structure mise en évidence a une taille voisine de 400 années-lumière. (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)	6
4	Vue d'artiste d'un système binaire. Le gaz en surface de l'étoile compagnon tombe vers l'objet compact en formant un disque d'accrétion. On remarque la présence d'un point chaud lorsque la matière tombant du compagnon percute le disque. (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)	7
5	Disques de débris autour d'étoiles jeunes vus dans l'infrarouge. (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)	7
6	Exemples de jets astrophysiques associés à des phénomènes d'accrétion. A gauche, on peut observer la trajectoire d'un jet de près de 500 pc, subissant de nombreux chocs avec le milieu interstellaire, ainsi que l'objet émetteur au centre (HH-47). A droite, on observe un disque d'accrétion en coupe (bande sombre) entourant une étoile en formation, ainsi que le début d'un jet partant perpendiculairement au plan du disque (HH-30). (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)	8
7	Structure magnétique d'accrétion-éjection d'après Casse & Ferreira (2000). L'écoulement du gaz est représenté en bleu et le champ magnétique en vert. Lorsque la pression thermique parvient à pousser la matière sur les lignes de champs, l'effet « magnéto-centrifuge » éjecte la matière et retire du moment cinétique au disque. (Crédit F. Casse)	9
8	Trajectoire d'une particule chargée en présence d'un champ magnétique : on observe une rotation autour du champ à la fréquence $\omega_{c\alpha}$ , ce qui permet de définir le rayon de Larmor $\lambda_L$ .	15
9	Écoulement caractéristique décrit par le système de Hill, avec en rouge la stratification verticale, en bleu le cisaillement de vitesse et en vert la rotation.	24
10	Exemple d'oscillation due à la présence d'un choc dans une méthode aux différences finies. Résolution d'une équation d'advection $\partial_t u + \partial_x u = 0$ avec une intégration temporelle de type Runge-Kutta d'ordre 4 et une dérivation spatiale centrée d'ordre 5.	32
11	Exemple de simulation aux volumes finis. Représentation de la densité lors de la propagation d'un jet astrophysique supersonique dans le milieu interstellaire. (Crédit G. Murphy)	33



- 
- 12 Exemple de simulation particulière de type SPH. Représentation de la densité lors de l'effondrement et la fragmentation d'un nuage interstellaire. On peut voir apparaître des cœurs denses qui donneront naissance aux étoiles ainsi que le début de la formation de structures d'accrétion. D'après Bate *et al.* (2002). 34
  - 13 Exemple d'oscillation due à la présence d'une discontinuité dans une méthode spectrale. Résolution d'une équation d'advection  $\partial_t u + \partial_x u = 0$  avec une intégration temporelle de type Runge-Kutta d'ordre 4 et une dérivation spatiale spectrale dans l'espace de Fourier. 35
  - 14 Évolution d'une fonction sinus advectée par un schéma d'Euler et une formule différences finies centrée d'ordre 2. Simulation sur 100 pas de temps et 10 points de grille. On met en évidence l'accroissement de l'amplitude de la solution : cet algorithme est instable. 39
  - 15 Tracé de  $|1 - \mathcal{T}(q)|$  pour un schéma temporel d'Euler en fonction des valeurs réelles et imaginaires de  $q$ . On voit clairement qu'un schéma différences finies symétrique [ $\Re(q) = 0$ ] ne peut pas être stable avec un tel schéma temporel. 42
  - 16 Tracé de  $|1 - \mathcal{T}(q)|$  pour 2 schémas temporels de Runge-Kutta en fonction des valeurs réelles et imaginaires de  $q$ . On montre ici qu'un schéma d'ordre 4 est stable pour des valeurs imaginaires pures de  $q$ , contrairement au schéma d'ordre 2. 43
  - 17 Tracé du maximum de  $\psi$  en fonction du temps pour différents schémas d'advection. On voit clairement que les schémas centrés et upwind sont inexploitable avec la méthode d'Euler. L'instabilité du schéma Runge-Kutta d'ordre 2 reste très contenue et le schéma Runge-Kutta d'ordre 4 est stable. 44
  - 18 Tracés de  $k_{\text{eff}}$  pour différentes formules différences finies. Notons que les schémas centrés ont systématiquement une partie imaginaire nulle. De même les schémas centrés d'ordre  $n$  et upwind d'ordre  $n - 1$  sont superposés sur le schéma  $\Re(k_{\text{eff}})$ . 45
  - 19 Interpolation d'une fonction constante par morceaux par des polynômes de Lagrange. Le phénomène d'oscillation apparaissant est nommé phénomène de Gibbs. 46
  - 20 Tests d'advection d'un créneau avec différentes formulations différences finies et une intégration temporelle de Runge-Kutta à l'ordre 4 (20 pas de temps avec  $\Delta t = 0.5$  et  $c = 1$ ). On remarque que les méthodes upwind permettent de réduire de manière significative les oscillations, même à des ordres élevés. 47
  - 21 Test d'un algorithme utilisant une intégration temporelle de Runge Kutta d'ordre 4 et des dérivées spatiales aux différences finies upwind d'ordre 4 sur l'équation de Burgers. L'intégration a été effectuée sur 50 pas de temps pour  $U_0 \Delta t / \Delta x = 0,5$ . 48
  - 22 Principe des zones fantômes pour traiter les conditions aux limites. L'espace physique sur lequel les équations sont effectivement résolues est délimité en gras, et les zones fantômes sont hachurées. On a représenté ici une grille avec 2 zones fantômes, bien que ce nombre puisse varier suivant l'ordre des formules différences finies utilisées. 50
  - 23 Principe des conditions aux limites shearing sheet : la boîte de simulation est recopiée de part et d'autre de la boîte calculée (en gras), en prenant en compte un décalage dû au cisaillement moyen. 52

- 24 Exemple de mise en œuvre des conditions aux limites shearing sheet avec un code utilisant 2 zones fantômes. On voit que la zone fantôme en bas à gauche doit être mise à jour à l'aide d'une interpolation entre 2 zones actives (en pointillé). 52
- 25 Test du tube de choc pour  $\gamma = 1.4$  et 100 points de grille à  $t = 0.2$ . La limite entre les deux milieux est fixée initialement en  $x = 0$ . On a choisi comme conditions initiales  $\rho = 1, P = 1$  à gauche et  $\rho = 0.125, P = 0.1$  à droite. 53
- 26 Principe de la décomposition de domaine : à chaque pas de temps, les zones fantômes sont mises à jour à partir des informations aux frontières des parcelles voisines. 56
- 27 Tests d'advection d'un créneau avec une méthode spectrale et un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4 (20 pas de temps avec  $\delta t = 0.5$  et  $c = 1$ ). La même advection effectuée à l'aide d'un schéma différences finies est donnée à titre de comparaison. 63
- 28 Comparaison des méthodes pseudo-spectrales sans dealiasing et avec la règle des «3/2». A gauche, on donne le spectre d'une fonction dont on veut calculer le carré. A droite, dans le calcul sans dealiasing, l'énergie spectrale devant apparaître à haute fréquence se voit «repliée» vers les fréquences plus basses (flèches) : c'est l'aliasing. La règle des 3/2 contourne ce problème en allouant un espace supplémentaire pour ces ondes hautes fréquences. 66
- 29 Évolution en fonction du temps d'une boîte définie à partir des coordonnées cisailées (37.135). 67
- 30 Cisaillement de l'espace spectral  $(k_x, k_y)$ . Les points représentent les ondes de la base Fourier (38.137) utilisées dans le code. Ces ondes se déplacent dans l'espace spectral  $(k_x, k_y)$  (flèches) et montrent que cet espace spectral est cisailé. 68
- 31 Le cisaillement de la grille spectrale induit 2 effets de bords au cours du temps. D'une part, la fréquence spatiale des ondes de traîne augmente, et certaines d'entre elles passent dans le domaine dissipatif de l'écoulement (cercles tiretés). D'autre part, des ondes de tête sortent du domaine dissipatif et deviennent *a priori* pertinentes pour la physique de l'écoulement (cercles pleins). Elles ne sont cependant pas traitées par la simulation. NB : On a représenté en pointillés les limites du domaine dissipatif de l'écoulement. 69
- 32 Principe de la procédure de remappage : on se fixe une grille fixe superposée à la grille de simulation à  $t = 0$  (en pointillés) . La grille de simulation, cisailée, vient ensuite se superposer tous les  $t_{\text{MAP}} = L_x / SL_y$  sur les points de la grille fixe. On peut alors effectuer un remappage en changeant les ondes représentées par la grille de simulation (flèches). 70
- 33 Exemple de remappage d'une grille de simulation. Les éléments sont déplacés sur toutes les colonnes  $p = \text{cte}$  en suivant les flèches. Les éléments qui sortent de la grille (pointillés) sont les ondes de traîne à haute fréquence, situées dans le domaine dissipatif. Les zones hachurées sont *a priori* inconnues : ce sont les ondes de tête discutées précédemment. Il faut alors que la résolution soit suffisante pour qu'elles apparaissent lorsqu'elles sont encore dans le domaine dissipatif. On peut ainsi initialiser leur amplitude à 0. 71
- 34 Les différents états de stabilité au voisinage d'un équilibre. Ici une bille sur un support courbe. On suppose le champ de gravité vertical et uniforme. 76
- 35 Les deux grandes classes d'instabilité en mécanique des fluides. Dans le cas super-critique, l'écoulement laminaire est inconditionnellement instable pour un  $Re > Re_c$  et

- transite spontanément vers un nouvel état d'équilibre (flèche). Dans le cas sous-critique, la transition se fera si  $Re > R_g$  et si l'amplitude de la perturbation est suffisamment importante. L'état laminaire est donc métastable pour  $Re > R_g$ . 78
- 36 Succession de bifurcations menant vers la turbulence développée dans le cas d'une instabilité super-critique. L'écoulement passe spontanément de l'une à l'autre des branches, menant à un écoulement totalement chaotique à un Reynolds suffisamment élevé par rapport à  $Re_c$ . 78
- 37 Principe de la cascade de Kolmogorov : Injection aux grandes échelles, cascade d'énergie par formation de petites échelles puis dissipation pour  $l = l_\eta$ . La forme de  $E(k)$  est donnée ici à titre indicatif. 79
- 38 Représentation schématique du spectre d'un écoulement turbulent dû à une instabilité sous-critique. L'instabilité sous-critique induit un couplage non linéaire qui injecte de l'énergie à grande échelle ( $l > l_M$ ). On a alors une cascade turbulente jusqu'aux petites échelles ( $l \sim l_\eta$ ) où l'on observe une dissipation visqueuse. 82
- 39 Schéma de principe d'un écoulement de Couette plan. 84
- 40 Mise en évidence de stries longitudinales en  $v'_x$  dans le plan médian  $x - z$  de l'écoulement. On voit qu'au cours d'un cycle, la strie est rompue par une instabilité ( $t = 1118$ ). En fin de cycle néanmoins, on observe une réapparition de la structure et le processus est prêt à recommencer. 85
- 41 Mécanisme de formation des stries en  $v'_x$  par advection du champ moyen. 86
- 42 Évolution de l'amplitude des modes les plus grands dans un écoulement de Couette Plan. L'énergie des modes de strie ( $n_x = 0, n_z = 1$ ) est transférée vers les modes  $n_x \neq 0$ . 86
- 43 Diagramme du mécanisme d'auto-entretien responsable de l'instabilité sous-critique dans les écoulements de Couette plan. Sont notés en trait pleins les phénomènes linéaires et en pointillés les interactions non linéaires. 87
- 44 Écoulement de Couette-Taylor : le fluide est entraîné entre 2 cylindres en rotation différentielle. Expérimentalement, les conditions aux limites verticales (non représentées ici) sont souvent problématiques. 91
- 45 Effet de la force de Coriolis sur une particule fluide déplacée selon l'axe  $y$ . 94
- 46 Reynolds de transition turbulente en fonction du nombre de courbure. 95
- 47 Reynolds de transition en fonction du nombre de rotation pour un écoulement de Couette plan. 96
- 48 Reynolds de transition pour un écoulement Couette-Taylor, d'après Richard (2001) et Longaretti (2002). 97
- 49 Représentation de l'évolution de l'énergie turbulente en fonction du temps pour différentes valeurs de  $R_\Omega = -2/q$ . On voit dans les 2 cas que la turbulence disparaît lorsque l'on s'éloigne de la stabilité marginale  $R_\Omega = -1$  ( $q = -2$ ), dès  $R_\Omega = -1.030$  ( $q = 1.94$ ). 98
- 50 Tracé de l'énergie cinétique ( $E_k$ ), l'énergie spécifique ( $E_s$ ) et l'énergie totale en fonction du temps pour  $R_\Omega = -1.035$ . La totalité de l'énergie cinétique est transformée en énergie thermique : c'est l'action du terme de viscosité artificielle. 99

- 
- 51 Exemple de simulation spectrale avec  $64^3$  modes et  $Re = 12000$ , représentant l'évolution de l'énergie turbulente moyenne et du transport moyen en fonction du temps. On notera l'augmentation (ou la diminution) par palier du nombre de rotation imposé au cours du temps. 104
- 52 Limite de stabilité pour un écoulement cyclonique. Les cercles correspondent aux simulation spectrales  $64^3$ , les losanges aux simulations spectrales  $32^3$  et les triangles aux simulations différences finies  $64^3$ . 104
- 53 Limite de stabilité pour un écoulement anticyclonique. Tous les points sont calculés avec le code spectral, exceptés les triangles (code différence finie). Les barres d'erreur (pointillés) proviennent de l'échantillonnage en Reynolds (voir texte). Les points trop proches ont été écartés pour faciliter la lecture. Enfin, les points situés sur les courbes correspondent à des simulations résolues, les autres non (voir texte). 105
- 54 Évolution du transport moyenné en fonction du nombre de rotation. Les moyennes sont faites sur des extraits de simulation ayant des Reynolds différents mais des nombres de rotation identiques. 107
- 55 Évolution des différents termes de l'équation (54.196) pour une simulation à  $Re = 2 \times 10^4$  et une résolution de  $64^3$  avec notre code spectral. On remarque que la part relative de dissipation numérique ( $\gamma_{num}$ ) reste inférieure à 2%. 109
- 56 Représentation de la contribution des échelles de nombre d'onde inférieur à  $k$  à la dissipation totale (en %). On remarque que 90% de la dissipation est due à des échelles de taille supérieure ou égale à 2 fois la taille de grille. D'après une simulation à  $Re = 6000$  et une résolution de  $64^3$ . 109
- 57 Spectres d'énergie pour deux résolutions différentes. On donne en pointillés rouges la pente correspondant au spectre de Kolmogorov. La simulation à  $32^3$  n'est résolue que pour  $Re = 6000$ . La simulation  $64^3$  est résolue pour  $Re = 6000$  et  $Re = 12000$  et. Spectres obtenus pour  $R_\Omega = -1.016$ . 111
- 58 Représentation de la contribution des échelles de nombre d'onde inférieur à  $k$  au transport total (en %). On remarque que 90% du transport est dû à des échelles de taille supérieure à  $1/4$  de la taille de boîte. D'après une simulation à  $Re = 2 \times 10^4$  et une résolution de  $128^3$ . 111
- 59 Reynolds de Transition en fonction du nombre de rotation d'après les données de Tillmark & Alfredsson (1996) et nos données de simulations spectrales (cercles) et différences finies (triangle). Les simulations de Komminaho *et al.* (1996) se superposent au point  $R_\Omega = 0,06$ ,  $Rg = 3000$  et n'ont pas été représentés sur la figure. 112
- 60 Reynolds de Transition en fonction du nombre de rotation d'après les données de Richard (2001) et nos données de simulations spectrales (losanges, cercles et croix) et différences finies (triangle inversé). La croissance de  $Rg$  en fonction de  $R_\Omega$  semble beaucoup plus importante pour nos simulations que pour les données de Richard. 113
- 61 Reynolds de Transition en fonction du nombre de rotation dans un écoulement de Couette plan avec murs. Le rapport d'aspect utilisé est  $L_x = 1,75\pi$   $L_y = 1$   $L_z = 1,2\pi$  et la résolution  $40 \times 80 \times 40$  avec Zeus3D. 114

- 62 Représentation de la vorticité de l'écart à l'écoulement laminaire tous les 20 temps de cisaillement. On observe l'évolution d'un vortex vertical dans un écoulement de Couette tournant. L'écoulement est ici purement bidimensionnel et le vortex est dissipé visqueusement. 115
- 63 Représentation de la vorticité de l'écart à l'écoulement laminaire tous les 20 temps de cisaillement. La condition initiale est identique à la figure (62), auquel on a ajouté un très faible bruit blanc (non visible sur la figure  $t = 0$ ). On observe l'accroissement de l'amplitude des perturbations et la destruction rapide du vortex par des mouvements 3D. 116
- 64  volution des fluctuations d'énergie des simulations des figures (62) et (63). La vitesse de dissipation, identique durant les premiers temps de cisaillement, devient beaucoup plus rapide dans la simulation avec bruit : la structure cohérente du vortex est donc détruite par les mouvements 3D. 117
- 65 Schéma d'un type de conditions aux limites utilisées dans les expériences de Richard (2001) : il s'agit d'une coupe dans le plan  $(r, z)$  du dispositif de Couette-Taylor (Fig. 44). Le fluide est représenté en hachures, le cylindre extérieur en trait plein et le cylindre intérieur en tirets. Les cylindres entraînent chacun une partie des murs servant de condition aux limites verticales. 117
- 66 Tracé de la vitesse verticale dans une coupe  $(y, z) = (r, z)$  pour  $Re=6000$  avec les conditions aux limites de Richard (2001)    $t = 400S^{-1}$ . NB : le rapport d'aspect n'est pas respecté pour des raisons de facilité d'impression. 119
- 67 Conditions aux limites utilisées dans l'approche analytique. Le milieu d'étude (2) est entouré de 2 milieux (1) et (3) s'étendant respectivement jusqu'à  $-\infty$  et  $+\infty$ . Les propriétés d'équilibre de chacun des milieux sont *a priori* différentes et permettent de reproduire plusieurs types de conditions aux limites. 129
- 68 Tracé de  $\log(\Im(\omega)/S)$  d'après la relation de dispersion (63.238) dans le cas  $R_\Omega = -4/3$ . On remarque que l'instabilité disparaît pour  $r > 1$  et que les plus grands nombres d'onde verticaux accessibles correspondent à  $r \rightarrow 0$ . 132
- 69 Tracé des solutions numériques  $S_1$  et  $S_2$  en fonction de  $\xi$  pour  $\xi_c = 3$  et  $R_\Omega = -4/3$ . On remarque le domaine exponentiel au voisinage de  $\xi = 0$  et les oscillations pour  $|\xi| > 3$ . 138
- 70 Tracé du déterminant  $\mathcal{D}_n(\xi_-, \xi_+)$  et du taux de croissance  $\Im(\xi_\omega)$  d'après nos solutions numériques. On remarque que l'instabilité apparaît lorsque deux courbes d'annulation de  $D_n$  se trouvent en rapprochement maximal. Ce résultat est similaire aux contraintes du résultat analytique  $Q_+ = 0$  et  $\sin(\Delta) = 0$ . 138
- 71 Mise en évidence de la SRI dans un écoulement de Couette plan stratifié verticalement. Tracé de  $v_z$  pour  $F = 1.54$ ,  $R_\Omega = -4/3$  et  $Re = 3000$ . La structure observée est stationnaire et correspond au régime d'instabilité décrit par les modes exponentiels. 139
- 72 Remplacement des conditions aux limites rigides par des conditions aux limites shearing sheet dans une simulation ayant développé la SRI. On voit nettement que l'instabilité disparaît après de brèves oscillations à  $t = 150$ . 140

- 73 Schéma de principe à l'origine de l'instabilité magnétorotationnelle. La torsion du champ du au déplacement du fluide tend à ramener le fluide vers sa position initiale (similaire à l'action d'un ressort). Le mouvement peut s'amplifier si  $\partial_r \Omega < 0$  (voir texte). 147
- 74 Tracé du taux de croissance de la MRI en régime képlerien en fonction de la pulsation d'Alfvén  $k_z V_A$ . On remarque que cette instabilité apparaît pour des pulsations comprises entre 0 et  $\omega_A^{\max} \simeq 1$ . 150
- 75 Tracé du seuil d'instabilité de la MRI en fonction de l'intensité du champ magnétique et de la dissipation pour  $Pm = 1$ . On remarque le seuil en champ fort mis en évidence dans l'analyse non dissipative  $\beta \simeq 29,5$  et le Reynolds minimum pour obtenir l'instabilité  $Re \simeq 80$ . 152
- 76 Tracé du taux de croissance en temps de cisaillement, et de la limite de stabilité linéaire pour un mode  $k_z = 2\pi/H$  et  $\beta = 10^4$ , d'après l'équation générale (76.315) On reconnaît les 2 limites de stabilité  $ReRm = cte$  et  $Rm = cte$  discutées précédemment. 156
- 77 Tracé du taux de croissance en temps de cisaillement, et de la limite de stabilité linéaire pour un mode  $k_z = 2\pi/H$  et  $\beta = 50$ , d'après l'équation générale (76.315). Les valeurs numériques prédites par notre analyse ne sont vérifiées ici. Cependant le comportement général reste identique à celui de la figure (76). 157
- 78 Tracé du couple (adimensionnalisé par le couple laminaire) entre les 2 cylindres d'un écoulement de Couette Taylor en fonction du Reynolds. Les triangles représentent un écoulement linéairement instable (critère de Rayleigh) et les carrés un écoulement turbulent sous critique. L'instabilité linéaire apparaît pour  $R_+ \sim 10$ . Le couple est en  $Re^{3/2}$  ( $\alpha \propto Re^{-1/2}$ ) entre  $R_+$  et  $R_{++}$  puis en  $Re^2$  ( $\alpha = cte$ ) pour  $Re > R_{++}$ . On dira alors que  $R_{++}$  est le Reynolds de transition vers l'état de turbulence développée. D'après Dubrulle *et al.* (2005a). 160
- 79 Évolution temporelle des moyennes de boîte de l'énergie magnétique et cinétique dans l'écoulement en présence de MRI pour  $\beta = 100$  et  $Re > 400$ . Les courbes d'évolution temporelles sont relativement semblables pour chaque simulation. 162
- 80 Évolution temporelle des moyennes de boîte de l'énergie magnétique et cinétique dans l'écoulement en présence de MRI pour  $\beta = 100$  et  $Re = 200$ . D'après le tableau (4), cette simulation n'est pas encore en régime de turbulence développée, ce que l'on peut vérifier ici en comparant l'évolution temporelle avec la figure (79). 163
- 81 Moyenne cumulée des coefficients de transport pour une simulation  $\beta = 100$ ,  $Re = 1600$ . On remarque que la valeur finale est convergée à 10%, ce qui est suffisant. 165
- 82 Mise en évidence de l'écoulement de canal dans une simulation numérique pour  $\beta = 50$  et  $Re = 2000$   $Pm = 1$  (tracé de  $v_y$ ). On observe la croissance du mode  $k_z = 2\pi/H$ , solution non linéaire des équations, puis l'apparition d'instabilités parasites ( $t = 44,4$ ), qui entraînent la destruction du mode et l'apparition d'une turbulence tridimensionnelle développée. 166
- 83 Moyenne des coefficients du transport en fonction de l'intensité du champ magnétique  $\beta$  pour  $Re = 1600$ ,  $Pm = 1$ . On remarque que le point  $\beta = 30$  se distingue par un transport extrêmement élevé comparativement aux autres simulations ( $\alpha = 1,2$ ). 167



- 
- 84 Courbes temporelles d'une simulation  $\beta = 30$ ,  $Re = 1600$ . On remarque la présence de bouffées turbulentes dues à la formations de forts écoulements de canal dont la destruction par une instabilité secondaire intervient très tardivement. 167
- 85 Tracé du coefficient de transport  $\alpha$  pour des simulations à  $\beta = 30$ ,  $Re = 1600, 3200, 6400$  et  $Pm = 1$ . Il semble que le comportement observé initialement sur la figure (84) est indépendant du nombre de Reynolds. 167
- 86 Évolution du phénomène de bouffée turbulente lorsque l'on s'éloigne du point de stabilité marginal  $\beta = 29,5$  pour  $Re = 1600$ . 168
- 87 Évolution du nombre de Prandtl dans un disque d'accrétion autour d'un trou noir de 10 masses solaires. (*Crédit Henri & Balbus*) 170
- 88 Évolution du transport moyen ( $\alpha$ ) en fonction du nombre de Prandtl pour différentes valeurs du Reynolds. Toutes les simulations sont effectuées à  $\beta = 100$ . 170
- 89 Taux de croissance linéaire du seul mode linéairement instable pour  $\beta = 100$ , avec les valeurs de résistivité et viscosité utilisées dans les simulations de la figure (88). 171
- 90 Tracé des spectres de dissipation pour des écoulements turbulents avec  $Pm = 0,25$  et  $Pm = 4$ ,  $Re = 3200$ . On remarque que la taille relative des échelles de dissipation est reliée au nombre de Prandtl. 172
- 91 Spectre turbulent hypothétique obtenu dans le cas  $Pm > 1$ . Le spectre magnétique est en tirets et le spectre de vitesse en trait plein. L'accumulation d'énergie entre les échelles  $l_B$  et  $l_V$  pourrait entraîner une réaction inverse sur les grandes échelles (flèches) ce qui expliquerait la corrélation  $Pm - \alpha$ . 173
- 92 Allure générale de la courbe  $\alpha(Pm)$  à petit Reynolds en supposant une saturation de l'effet  $Pm - \alpha$ . 174
- 93 Tracé de l'évolution du coefficient de transport  $\alpha$  en fonction du temps pour des simulations avec  $B_0 = 0$  et  $Re = 6400$ . Un nombre de Prandtl inférieur ou égal à 1 semble éliminer l'instabilité. On retrouve des résultats similaires pour  $Re = 1600$  et  $Re = 3200$ . 175

## Liste des tableaux

1	Évaluation des quantités caractéristiques du plasma dans deux classes de disque d'accrétion typiques.	20
2	Évaluation de l'ordre de grandeurs des termes présents dans la loi d'Ohm.	21
3	Valeurs estimées du Reynolds de Transition et du transport d'après les extrapolations de la figure (53). La valeur donnée par la dernière colonne est une borne supérieure au transport, supposant que $R_g$ ne varie plus jusqu'à $R_\Omega = -4/3$ depuis le dernier point résolu ( $Re = 4 \times 10^4$ , $R_\Omega = -1.034$ ).	107
4	Évolution des moyennes adimensionnalisées du tenseur de Reynolds ( $\alpha_V$ ), du tenseur de Maxwell ( $\alpha_B$ ) et du transport moyen ( $\alpha$ ) pour des simulations à $\beta = 100$ pour différents Reynolds ( $Pm = 1$ ). On note que la simulation $Re = 200$ ne semble pas avoir atteint un état de turbulence développée. Le protocole utilisé pour les moyennes est identique à celui décrit dans la section suivante.	162





# Partie I

## Introduction

1	Des disques d'accrétion dans l'univers?	3
2	Modèle physique et approximations	13



# 1

## Des disques d'accrétion dans l'univers?

« Du chaos naît une étoile. »

— Charlie Chaplin

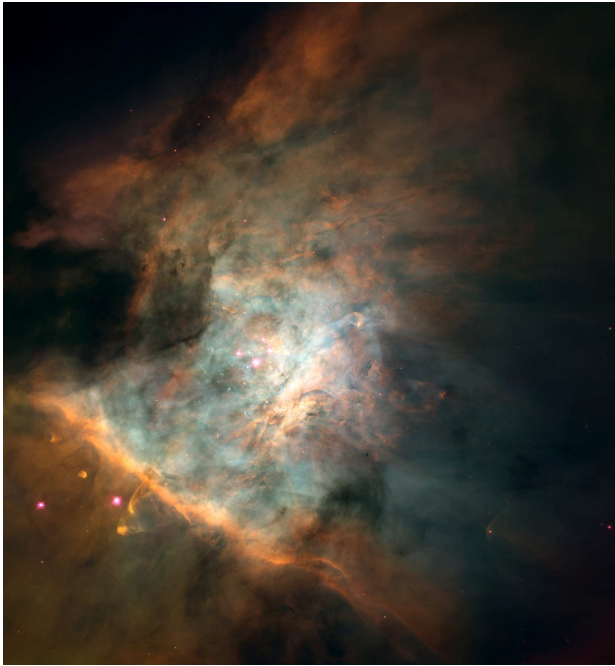
### Plan du chapitre

1. Qu'est-ce qu'un disque d'accrétion? .....	3
§ 1. Le moment cinétique dans l'univers.....	3
§ 2. Formation de disques d'accrétion dans l'univers : entre théorie et observation .....	5
§ 2.1. Prototype de disque d'accrétion.....	5
§ 2.2. Noyaux actifs de galaxie .....	6
§ 2.3. Systèmes binaires .....	6
§ 2.4. Étoiles jeunes .....	7
§ 2.5. Des jets accompagnant les structures d'accrétion?.....	7
2. Le problème du transport du moment angulaire .....	8
§ 3. Différents processus de transport.....	8
§ 4. Sources de turbulence dans les disques.....	10
§ 5. Contraintes observationnelles et théoriques sur l'efficacité du transport.....	11
3. Objectifs de cette Thèse.....	12

### 1. Qu'est-ce qu'un disque d'accrétion?

#### § 1. Le moment cinétique dans l'univers

**D**E MANIÈRE ASSEZ SURPRENANTE AU PREMIER ABORD, la nature semble favoriser les systèmes tournants aux échelles astronomiques. Ainsi, dans notre environnement immédiat, la lune tourne autour de la terre, qui tourne autour du soleil, tout comme les autres planètes. Ce type de comportement ne se limite pas à notre système solaire et semble observé dans toute notre galaxie. En fait, on peut expliquer ces observations assez facilement avec des ingrédients physiques simples.



**FIG. 1.** Détail d'un nuage interstellaire en effondrement gravitationnel (nébuleuse d'Orion). On y remarque les premiers globules gazeux denses qui donneront des protoétoiles. (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)

En effet, aux échelles astronomiques, la force dominante est la force gravitationnelle, qui est uniquement attractive<sup>1</sup>. L'essentiel de l'activité observée dans l'univers est donc lié à un mouvement de contraction des objets, éventuellement jusqu'au stade ultime décrit par la relativité générale : le trou noir. Cependant, cet effondrement des structures de l'univers ne serait pas aussi riche sans la conservation du moment cinétique. De la même manière qu'une patineuse effectuant une toupie augmente sa vitesse de rotation lorsqu'elle rapproche les bras de son corps, un nuage de gaz interstellaire (Fig. 1), possédant un moment cinétique initialement très faible, voit sa vitesse de rotation augmenter lorsqu'il se contracte.

Cependant, là où la patineuse arrive à se « contracter » d'un facteur de l'ordre de 2, soit une vitesse de rotation 4 fois plus rapide, le nuage interstellaire peut se contracter d'un facteur 1000, ce qui entraîne naturellement une augmentation conséquente de la rotation de l'objet. Ainsi, on atteint rapidement un stade où la force centrifuge équilibre plus ou moins la force gravitationnelle : l'objet « tourne ».

Dans ce chapitre, je vais m'intéresser à des structures qui sont le résultat de ce type de processus d'effondrement : les disques d'accrétion. Je présenterai dans un premier temps leur mécanisme de formation, ainsi que les différents objets astrophysiques dans lesquels on peut les retrouver. Je discuterai aussi de leur lien potentiel avec les phénomènes de jet puis j'étudierai quelques résultats observationnels. Je finirai en présentant les différents modèles théoriques envisageables, et en particulier comment mon travail de thèse s'articule dans cet ensemble.

---

<sup>1</sup>Notons néanmoins qu'aux très grandes échelles, une énergie « sombre » semble avoir un effet répulsif et accélère l'expansion de l'Univers.



**FIG. 2.** Vue d'artiste d'un disque d'accrétion autour d'une étoile jeune. (Crédit David Darling)

## § 2. Formation de disques d'accrétion dans l'univers : entre théorie et observation

### § 2.1. *Prototype de disque d'accrétion*

Un disque d'accrétion est un fluide composé de gaz et de poussières, en rotation autour d'un objet central tel qu'une étoile jeune, une naine blanche, une étoile à neutron ou un trou noir (Fig. 2). Comme je l'ai présenté dans la section précédente, la matière du disque se trouve alors, en première approximation, en équilibre entre la force centrifuge et la gravitation de l'objet central (l'auto gravité du disque étant négligeable, ce dernier étant beaucoup moins massif que l'objet central). La matière du disque suit alors la troisième loi de Képler, qui pour une rotation circulaire s'écrit simplement  $V \propto R^{-1/2}$ . On parlera donc dans ce cas de disque « képlerien ».

Cependant, le gaz du disque ayant une viscosité non nulle<sup>2</sup>, les couches radiales du disque « frottent » les unes contre les autres et transforment l'énergie mécanique en chaleur. La matière du disque tombe alors progressivement en spirale vers l'objet central en émettant un rayonnement dû au chauffage. On peut donc voir dans les disques d'accrétion un moyen efficace pour convertir l'énergie gravitationnelle en énergie thermique ou rayonnante. En pratique, on peut convertir 10% de l'énergie de masse du gaz par accrétion autour d'une étoile à neutron, valeur qui peut monter jusqu'à 40% autour d'un trou noir (Pringle 1981).

Historiquement, le paradigme du disque d'accrétion a été introduit par Kuiper (1941), en remarquant que le transfert de masse entre deux étoiles binaires en contact pouvait former un « anneau » de matière autour de l'étoile accrétante. Par la suite, le concept a été repris et étendu par Prendergast & Burbidge (1968) pour expliquer les caractéristiques de la binaire X Cyg X2 et par Lynden-Bell (1969) pour justifier la forte luminosité des noyaux actifs de galaxies. Les disques sont alors devenus un sujet d'étude à part entière, avec entre autres, le modèle standard de Shakura & Sunyaev (1973) que je discuterai dans la suite de ce chapitre.

On pense aujourd'hui que ces objets sont à l'œuvre dans une grande variété de phénomènes astrophysiques. En effet, on les rencontre dans les noyaux actifs de galaxie (NAGs), où l'objet central est un trou noir supermassif ( $M \simeq 10^8 M_\odot$ ) ; dans les microquasars et variables cataclysmiques, systèmes binaires composés d'un objet dense (étoile à neutron, trou noir stellaire, naine blanche) accrétant la matière d'une étoile classique ; et autour des étoiles jeunes, où ils apparaissent, entre autres, comme des « pouponnières » à planètes.

<sup>2</sup>Le processus d'accrétion est en fait nettement plus compliqué, mais la physique fondamentale n'est pas modifiée par cette approche simplifiée.

## § 2.2. Noyaux actifs de galaxie

Le problème physique posé par les noyaux actifs de galaxie vient de la très grande puissance lumineuse émise (jusqu’à  $10^{49}$  erg/s) sur une échelle caractéristique de quelques heures lumières (Lin & Papaloizou 1996). On peut alors montrer que seul un processus d’accrétion autour d’un objet très massif (trou noir d’une masse allant de  $10^8 M_\odot$  à  $10^{10} M_\odot$ ) peut être compatible avec les propriétés d’émission des NAGs.

Les moyens observationnels modernes ont permis de mettre en évidence de tels structures en imagerie directe. Ainsi, Jaffe *et al.* (1993) ont observé pour la première fois, avec le télescope spatial Hubble, une structure semblable à un disque d’accrétion entourant le cœur de la galaxie NGC 4261 (Fig. 3). Il semble néanmoins qu’il ne s’agisse ici que d’un tore de gaz entourant un disque d’accrétion central.

Les températures typiques observées dans ces disques sont de l’ordre de  $10^4$  K et leur rapport d’aspect (rapport entre la hauteur du disque et son rayon) sont de l’ordre de  $10^{-2}$ , ce qui en fait des disques géométriquement minces (Lin & Papaloizou 1996).

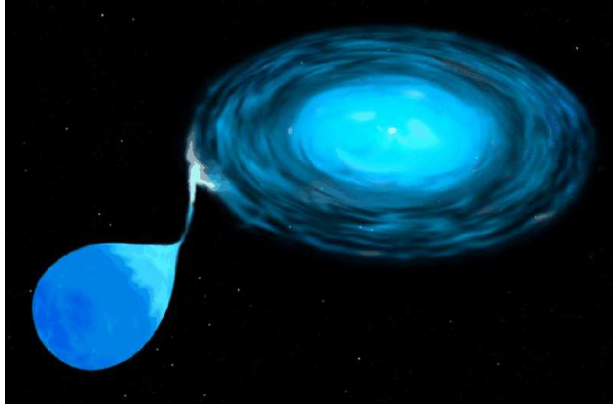


**FIG. 3.** Tore de gaz au cœur de la galaxie NGC4261. La structure mise en évidence a une taille voisine de 400 années-lumière. (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)

## § 2.3. Systèmes binaires

Dans le cas d’un système binaire, la matière est accrétée depuis l’étoile compagne vers l’objet compact. On obtient ainsi un disque d’accrétion ainsi qu’un point chaud lors du contact entre le disque et le flux de matière provenant du compagne, entraînant localement une très forte dissipation (voir Fig. 4).

Il n’existe pas d’observation directe de tels disques d’accrétion, en raison de leur très petite taille. Cependant, on retrouve dans les spectres de ces objets des traces du point chaud ainsi que des décalages Doppler des raies d’émissions de Balmer caractéristiques de la présence d’un disque d’accrétion. Par ailleurs, dans les systèmes qui le permettent, les phénomènes d’éclipse du disque par le compagne permettent de caractériser précisément ce dernier (Lin & Papaloizou 1996; Balbus & Hawley 1998).



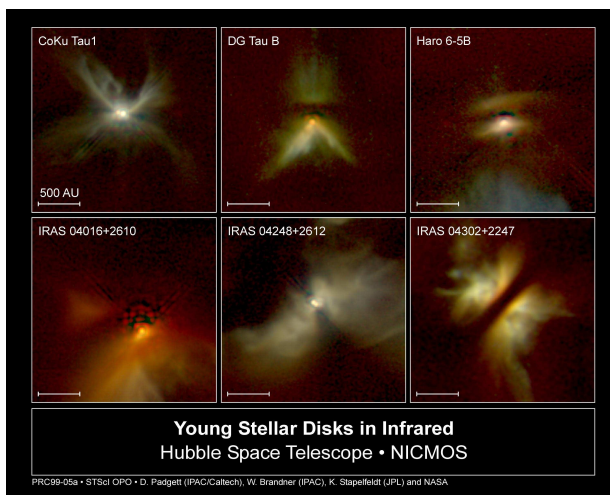
**FIG. 4.** Vue d'artiste d'un système binaire. Le gaz en surface de l'étoile compagne tombe vers l'objet compact en formant un disque d'accrétion. On remarque la présence d'un point chaud lorsque la matière tombant du compagne percute le disque. (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)

## § 2.4. Étoiles jeunes

Il a été remarqué assez tôt que les planètes de notre propre système solaire semblaient toutes, à un très bon niveau d'approximation, être présentes dans un même plan : l'écliptique. Ainsi, Laplace avait suggéré dès 1796 que les planètes se soient formées dans un disque de gaz et de poussières.

L'hypothèse de disques autour des étoiles jeunes a été reprise par Lynden-Bell & Pringle (1974) pour expliquer les propriétés des étoiles T-Tauri, une classe particulière d'étoiles en formation. Par la suite, des simulations numériques ont confirmé que le modèle de formation des étoiles par effondrement gravitationnel pouvait engendrer un disque d'accrétion (Terebey *et al.* 1984).

L'imagerie directe a permis par ailleurs de mettre en évidence des disques de poussière autour de certaines étoiles jeunes, sous la forme de bandes sombres masquant la protoétoile (Fig. 5). Ces disques de débris dans lesquels se forment des planètes seraient alors le stade ultime d'évolution des disques d'accrétion.



**FIG. 5.** Disques de débris autour d'étoiles jeunes vus dans l'infrarouge. (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)

## § 2.5. Des jets accompagnant les structures d'accrétion?

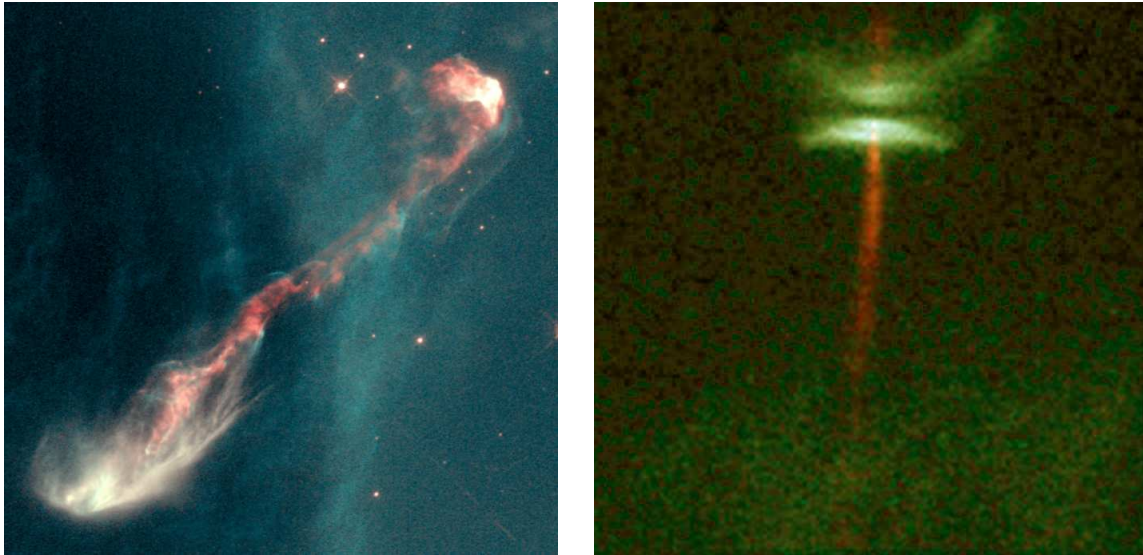
Des jets astrophysiques peuvent être observés dans les premières phases de la formation stellaire jusqu'à la phase T-Tauri (voir Fig. 6). Ils ont dans ce cas des vitesses de l'ordre de 100 km/s et une taille typique de l'ordre du parsec. Des jets beaucoup plus gros sont observés dans les NAGs,



où les vitesses mesurées sont voisines de la vitesse de la lumière (voir parfois, en raison d'effets d'optique relativistes, superluminiques) sur des distances voisines de  $10^6$  pc. On observe aussi des jets dans les systèmes binaires comme les microquasars. Ils sont par ailleurs caractérisés par des écoulements très peu évasés, ce qui semble indiquer qu'ils sont dominés par des effets de collimation magnétique (Livio 1999).

Il semble que la plupart des phénomènes d'accrétion soient associés à des phénomènes d'éjection de type jet. Ainsi, par exemple, l'efficacité de l'accrétion dans les étoiles jeunes est reliée à l'intensité des jets observés (Cabrit 2002). De plus, l'existence d'un champ magnétique global ancré à l'intérieur du disque d'accrétion peut être un moyen efficace d'évacuer le moment cinétique du disque via un jet (Ferreira & Pelletier 1995).

On le comprend, la question de l'éjection semble étroitement reliée à celle de l'accrétion et il n'est pas impossible que la solution au problème de l'accrétion des disques passe par un modèle complet d'accrétion-éjection.



**FIG. 6.** Exemples de jets astrophysiques associés à des phénomènes d'accrétion. A gauche, on peut observer la trajectoire d'un jet de près de 500 pc, subissant de nombreux chocs avec le milieu interstellaire, ainsi que l'objet émetteur au centre (HH-47). A droite, on observe un disque d'accrétion en coupe (bande sombre) entourant une étoile en formation, ainsi que le début d'un jet partant perpendiculairement au plan du disque (HH-30). (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)

## 2. Le problème du transport du moment angulaire

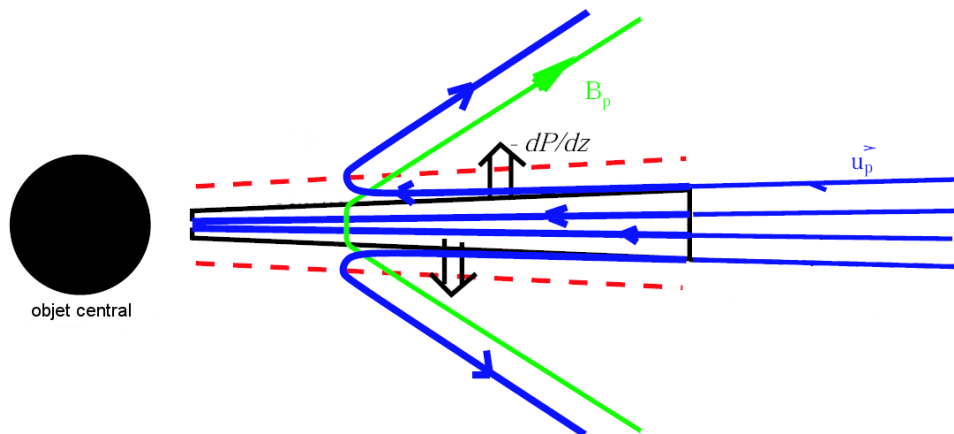
### § 3. Différents processus de transport

Comme je l'ai dit de manière préliminaire, l'accrétion du gaz vers l'objet central nécessite un processus physique capable d'extraire le moment angulaire de la matière en rotation, afin de briser l'équilibre entre la gravitation et la force centrifuge. Naturellement, la viscosité du fluide pourrait jouer ce rôle. Cependant, le calcul de la viscosité moléculaire collisionnelle du fluide (voir par exemple Spitzer 1962) montre que cette dernière est trop faible par plusieurs ordres de grandeur pour pouvoir expliquer les phénomènes observés, et en particulier les

temps caractéristiques d'évolution. Il faut donc trouver un (ou plusieurs) processus alternatifs d'extraction du moment angulaire.

- **Ondes globales.** L'existence d'ondes non axisymétriques, dues à des phénomènes de marée, a été proposée pour expliquer le transport de moment angulaire dans les disques (voir par exemple Papaloizou & Lin 1995 pour une revue de la littérature). Ce processus semble efficace, mais nécessite une source de dissymétrie, telle qu'une étoile compagnon, ou encore l'inclinaison du disque par rapport à l'axe de rotation d'un trou noir de Kerr (Bardeen & Petterson 1975), ce qui le rend difficilement applicable dans le cas général. Par ailleurs, les ondes autogravitantes, à la manière des ondes spirales des galaxies, ont aussi été envisagées (Paczynski 1978; Kozłowski *et al.* 1979) et sont une autre source potentielle de transport pour les disques suffisamment froids.

- **Vent magnétohydrodynamique.** Comme je l'ai montré, il semble que l'existence de jets soit corrélée avec les structures d'accrétions. On peut dès lors concevoir que les jets sont un processus d'évacuation du moment angulaire du disque, par l'intermédiaire d'un champ magnétique. Ce type de processus, initialement proposé par Blandford & Payne (1982), suppose l'existence d'un champ magnétique poloïdal ouvert, fixé au disque d'accrétion. La matière éjectée à la surface du disque suit alors les lignes de champ et extrait le moment cinétique de la surface de disque. Ce type de processus a depuis été étendu en un processus global d'accrétion-éjection, incluant à la fois la dynamique du disque et celle du jet, par des calculs auto-similaires (Ferreira 1995; Ferreira & Pelletier 1995) et des simulations numériques (Casse & Keppens 2002; Zanni *et al.* 2007). Il n'en reste pas moins que ce type de modèle nécessite la présence d'une résistivité anormale dans les disques que seule la turbulence semble pouvoir offrir (Ferreira 1997).



**FIG. 7.** Structure magnétique d'accrétion-éjection d'après Casse & Ferreira (2000). L'écoulement du gaz est représenté en bleu et le champ magnétique en vert. Lorsque la pression thermique parvient à pousser la matière sur les lignes de champs, l'effet « magnéto-centrifuge » éjecte la matière et retire du moment cinétique au disque. (Crédit F. Casse)

- **Turbulence.** Un processus de transport turbulent a été proposé dès les premiers modèles de disque par Shakura & Sunyaev (1973). Dans ces modèles (et aujourd'hui encore), la turbulence

est modélisée par une prescription *ad hoc*, basée sur une viscosité turbulente « effective » que l’on note :

$$\nu_t = \alpha c_s H \quad (3.1)$$

où  $c_s$  est la vitesse du son et  $H$  la hauteur du disque. Le coefficient  $\alpha$  contient alors l’essentiel de la physique du disque et est fixé, soit par des contraintes observationnelles, soit par des considérations théoriques sur la turbulence des disques. Actuellement, beaucoup de modèles se contentent de cette description simple.

La turbulence semble donc être un processus assez prometteur pour expliquer le transport de moment cinétique dans les disques. De plus, elle est un ingrédient indispensable aux processus d’accrétion-éjection (Ferreira 1997). Cependant, le talon d’Achille de toute cette construction réside bien sûr dans la description de cette turbulence, cachée dans le paramètre  $\alpha$ . On peut entre autre s’interroger sur son efficacité, ses propriétés statistiques, sa dépendance vis-à-vis des autres paramètres du problème (champ magnétique, densité, température...), sa variabilité, *etc.* Ces questions seront abordées dans ce manuscrit, en étudiant quelques unes des instabilités les plus prometteuses.

#### § 4. Sources de turbulence dans les disques

La nature, voire l’existence même de la turbulence dans les disques est un problème trentenaire. La plus grosse difficulté vient de l’absence d’instabilité linéaire hydrodynamique « évidente » dans ces objets, telle que l’instabilité de Taylor-Couette. En pratique, on envisage donc certains processus physiques que l’on pense être à l’œuvre dans les disques, puis on étudie la stabilité du système par des méthodes analytiques, expérimentales ou numériques. La détection d’une instabilité n’apporte évidemment qu’une réponse partielle au problème, car il faut ensuite prévoir l’efficacité de la turbulence déclenchée par le processus, et la comparer aux observations. Force est de constater qu’à l’heure actuelle, peu d’instabilités répondent favorablement à cette dernière question...

Une première classe d’instabilité faisant intervenir le disque dans son ensemble est la classe des instabilités globales. On retrouve en particulier l’instabilité globale non axisymétrique de Papaloizou & Pringle (1984), pouvant apparaître dans les disques sub-képlerien (moment angulaire constant). Il semble cependant que cette instabilité soit peu pertinente pour induire une turbulence et un transport efficace dans des cas pratiques (Blaes 1987; Hawley 1991).

L’autre classe d’instabilité, beaucoup plus étudiée, recouvre les instabilités dites locales. Ces instabilités, peu dépendantes des conditions aux limites, peuvent être étudiées facilement en utilisant des modèles locaux de disques, tels que celui qui sera développé au deuxième chapitre. On retrouve dans cette classe l’instabilité sous-critique hydrodynamique, initialement suggérée par Lynden-Bell (1969) et Lynden-Bell & Pringle (1974), dont le moteur est simplement le cisaillement local du disque. Cette instabilité a donné lieu par la suite à un vif débat et on trouvera une discussion de ce mécanisme dans la troisième partie de ce manuscrit. Si l’on considère des effets de chauffage dans le plan du disque, il est possible de former une instabilité convective verticale, éventuellement source de transport de moment cinétique radial. Cependant, le transport obtenu est faible et va vers l’intérieur du disque, là où le modèle  $\alpha$  prévoit un transport de moment cinétique vers l’extérieur (Cabot 1996; Stone & Balbus 1996). De plus, une stratification verticale stabilisante, couplée à la rotation et au cisaillement radial semble

engendrer une autre instabilité, dite strato-rotationnelle, que j'étudierai dans la quatrième partie. Il s'avèrera cependant que cette instabilité est de nature globale et non pertinente pour les disques.

Dans un autre contexte, Klahr & Bodenheimer (2003) ont montré que les disques étaient sensibles à une instabilité baroclinique, en raison d'un gradient radial d'entropie négatif. Leurs simulations montrent en particulier une turbulence apparemment développée et un transport du moment cinétique vers l'extérieur. Cependant, des analyses linéaires locales (Klahr 2004; Johnson & Gammie 2005) ainsi que des simulations numériques (Johnson & Gammie 2006) ont montré que l'on observait uniquement des croissances transitoires, et donc aucune turbulence entretenue.

Enfin, si l'on considère un disque couplé avec un champ magnétique, on trouve une instabilité linéaire puissante (Balbus & Hawley 1991a), produisant un transport vers l'extérieur, et pouvant potentiellement auto-entretenir son propre champ magnétique (Hawley *et al.* 1995; Brandenburg *et al.* 1995). Cette instabilité, dite magnéto-rotationnelle, sera le sujet de la dernière partie de ce travail.

## § 5. Contraintes observationnelles et théoriques sur l'efficacité du transport

On l'a vu, la description du transport de moment angulaire dans un disque d'accrétion se fait en pratique avec une prescription de viscosité turbulente, dite « prescription  $\alpha$  ». Ce coefficient  $\alpha$  peut être fixé à l'aide d'observations de disques et contraindre ainsi les modèles théoriques.

On pourrait s'attendre à obtenir des contraintes sur  $\alpha$  via le spectre du disque que l'on observe. En effet, la turbulence, de la même manière qu'un couple visqueux classique, induit un chauffage local en transformant l'énergie mécanique du gaz accrété en énergie thermique<sup>3</sup>. Cette chaleur est alors transférée sous forme de rayonnement dans le milieu interstellaire et peut donner une signature spectrale caractéristique d'un disque d'accrétion (voir par exemple Blaes 2004 pour un calcul complet). Malheureusement ce type d'approche est peu contraignante sur  $\alpha$  en raison de la faible dépendance du spectre par rapport à ce coefficient (King *et al.* 2007).

En pratique, on contraint donc  $\alpha$  sur des phénomènes temporels. En effet, la viscosité turbulente donne accès à un temps caractéristique d'évolution du phénomène d'accrétion, lequel peut être relié à la variabilité observée dans les objets astrophysiques. Ainsi, on obtient pour les NAGs et les systèmes binaires  $\alpha \simeq 0,1 - 0,4$  (Lin & Papaloizou 1996) et  $\alpha \simeq 10^{-3} - 10^{-2}$  pour les étoiles jeunes (King *et al.* 2007).

Remarquons que d'autres contraintes peuvent être obtenues par des modèles théoriques. En particulier, les modèles d'accrétion-éjection auto-similaires montrent que le disque doit avoir une viscosité turbulente ainsi qu'une résistivité turbulente, (adimensionnalisées de la même manière que la viscosité) voisines de l'unité pour pouvoir éjecter de la matière (Casse & Ferreira 2000). Cette contrainte peut être relaxée jusqu'à un certain point, en supposant que la résistivité turbulente est anisotrope, c'est-à-dire qu'elle diffuse plus fortement le champ magnétique azimuthal que le champ poloidal. Par ailleurs, il semble que l'éjection n'a lieu que pour des champs magnétique proches de l'équipartition entre énergie thermique et magnétique

<sup>3</sup>Remarquons qu'en toute généralité, la turbulence peut aussi convertir l'énergie mécanique de l'écoulement en énergie magnétique, ou engendrer des phénomènes éruptifs qui ne sont pas décrits par la prescription  $\alpha$ .

(Ferreira & Pelletier 1995), ce qui impose des contraintes supplémentaires sur l’intensité du champ magnétique, et donc sur les instabilités magnétohydrodynamiques.

### 3. Objectifs de cette Thèse

La dynamique des disques d’accrétion semble dominée par un phénomène de turbulence, dont l’origine reste encore aujourd’hui controversée. A travers ce manuscrit, je vais développer la physique de quelques unes des instabilités que j’ai discuté dans ce chapitre. Mes motivations sont doubles. D’une part, je souhaite caractériser une, ou plusieurs, instabilités capables d’engendrer une turbulence forte et susceptible d’expliquer le transport de moment cinétique requis par les observations, c’est à dire  $\alpha \simeq 0,001\text{—}0,4$ . D’autre part, je souhaite aller au delà du modèle  $\alpha$ , en précisant l’efficacité de la turbulence en fonctions des différents paramètres physiques susceptibles d’intervenir, ceci pour obtenir de nouvelles contraintes sur les modèles, et pourquoi pas, des explications à certaines observations aujourd’hui mal comprises.

Ce travail de thèse s’entend donc être un premier pas vers un modèle de turbulence basé sur une véritable phénoménologie physique, tels que ceux que l’on peut rencontrer dans la communauté de la mécanique des fluides.

# 2

## Modèle physique et approximations

### Plan du chapitre

1. Modèle à un fluide .....	13
§ 6. Les équations de la magnétohydrodynamique .....	14
§ 6.1. Quelques grandeurs caractéristiques d'un plasma .....	14
§ 6.2. Équations du mouvement des ions .....	15
§ 6.3. Équation d'énergie, tenseur des contraintes .....	16
§ 6.4. Loi d'Ohm .....	17
§ 6.5. Équations de Maxwell .....	18
§ 6.6. Les équations de la MHD .....	19
§ 7. Application des équations MHD à la physique des disques d'accrétion .....	19
§ 7.7. Vérification des approximations MHD .....	19
§ 7.8. Approximation de la loi d'Ohm .....	20
2. Modèle local, approximation de Hill .....	21
§ 8. Nécessité d'un modèle local .....	21
§ 9. Développement des équations locales .....	22
§ 10. Équilibre vertical, compressibilité .....	23
3. Méthodologie .....	24

### 1. Modèle à un fluide

**É**TUDIER LA TURBULENCE DANS UN DISQUE D'ACCRÉTION signifie avoir un modèle représentant l'essentiel de la physique à l'œuvre dans ces objets. Dans ce chapitre, je vais donc expliciter le modèle fluide qui servira tout au long de ce manuscrit. Je vais dans un premier temps décrire l'approximation de la magnétohydrodynamique, et je montrerai en quoi elle est pertinente pour les objets que je souhaite étudier. Finalement, j'introduirai un modèle local de l'écoulement d'un disque d'accrétion, le modèle de Hill, qui servira de prototype pour étudier les instabilités.



## § 6. Les équations de la magnétohydrodynamique

Notons que je ne discuterai ici que du modèle de la magnétohydrodynamique collisionnelle des milieux totalement ionisés. On pourra trouver d'autres modèles, valides dans différents régimes d'approximation (MHD non collisionnelle, modèle à deux fluides...) dans Freidberg (1987) et Krall & Trivelpiece (1986).

Le but de la magnétohydrodynamique (MHD) est de décrire la dynamique d'un plasma, c'est-à-dire d'un gaz ionisé comportant des particules chargées, en présence d'un champ magnétique. Cette description induit des effets physiques extrêmement riches en raison de l'influence mutuelle du champ magnétique sur le fluide (force de Lorentz) et des mouvements du fluide sur le champ magnétique (effet d'induction). Dans cette section, je commencerai par caractériser quelques quantités caractéristiques du plasma, puis je dériverai les équations à un fluide dans l'approximation MHD.

### § 6.1. Quelques grandeurs caractéristiques d'un plasma

- **Sphère de Debye, paramètre plasma.** En astrophysique, les gaz sont essentiellement composés d'hydrogène. Ainsi, on considère la plupart du temps que les plasmas sont composés exclusivement de protons et d'électrons. Chacune de ces particules induit donc un champ électrique via le potentiel coulombien :

$$\phi(r) = \frac{q}{r} \quad (6.2)$$

où  $q = \pm e$  est la charge de la particule considérée. Les électrons se voient donc naturellement attirés par les protons, et un équilibre s'établit entre l'agitation thermique des électrons et le potentiel coulombien au voisinage des protons, de sorte que le potentiel effectif des protons se voit écranté par les électrons et prend une expression de la forme :

$$\phi(r) = \frac{q}{r} \exp(-r/\lambda_D) \quad (6.3)$$

où  $\lambda_D$  est la longueur d'écrantage de Debye que l'on écrira (cf par exemple Krall & Trivelpiece 1986) :

$$\lambda_D = \left( \frac{kT}{8\pi n e^2} \right)^{1/2} \quad (6.4)$$

où  $n$  est la densité d'électrons,  $T$  est la température et  $k$  est la constante de Boltzmann ( $k = 1,38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$ ).

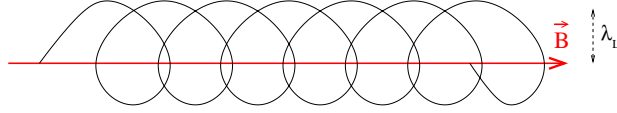
Cette longueur d'écrantage permet alors de définir le paramètre plasma  $g$ , quantifiant le nombre d'électrons présents dans la sphère de Debye :

$$g = \frac{1}{n\lambda_D^3} \propto \frac{n^{1/2}}{T^{3/2}} \quad (6.5)$$

Pour que l'effet d'écrantage de Debye soit réel, il faudra que l'on ait suffisamment d'électrons dans la sphère de Debye pour utiliser le traitement statistique précédent, c'est à dire  $g \ll 1$ .

---

<sup>4</sup>On a supposé ici que la distribution de vitesse des électrons suivait une maxwellienne. Cette approximation sera systématiquement utilisée dans la suite.



**FIG. 8.** Trajectoire d'une particule chargée en présence d'un champ magnétique : on observe une rotation autour du champ à la fréquence  $\omega_{c\alpha}$ , ce qui permet de définir le rayon de Larmor  $\lambda_L$ .

• **Fréquence cyclotron, Rayon de Larmor.** Considérons une particule chargée  $\alpha$  ayant une vitesse  $v_\alpha$  en présence d'un champ magnétique  $B$ . Son mouvement se décrit aisément avec les équations de la dynamique :

$$m_\alpha \frac{dv_\alpha}{dt} = -\frac{q_\alpha}{c} v_\alpha \times B \quad (6.6)$$

On obtient alors un mouvement caractéristique en spirale autour des lignes de champ  $B$  (voir fig. 8), dont la fréquence de rotation est donnée par la fréquence cyclotron :

$$\omega_{c\alpha} = \frac{q_\alpha B}{m_\alpha c}, \quad (6.7)$$

et qui définit un rayon caractéristique de giration : le rayon de Larmor,

$$\lambda_L = \frac{m_\alpha c v_\perp}{q_\alpha B} \quad (6.8)$$

où  $v_\perp$  est la vitesse de la charge perpendiculairement au champ magnétique.

• **Fréquence plasma.** Considérons une distribution arbitraire d'électrons et de protons à l'équilibre, et déplaçons l'ensemble des électrons. Comme les électrons sont nettement moins massifs que les protons, ces derniers ne se déplacent presque pas lors de ce mouvement. Ainsi, la distribution de protons donnera une force de rappel, et engendrera une oscillation des électrons autour de leur position initiale. On peut alors montrer que la fréquence d'oscillation des électrons est donnée par (Krall & Trivelpiece 1986) :

$$\omega_{pe} = \left( \frac{4\pi n e^2}{m_e} \right)^{1/2} \quad (6.9)$$

## § 6.2. Équations du mouvement des ions

Pour commencer, remarquons que l'on est en présence de 2 fluides distincts. On peut donc écrire séparément les équations de conservation de la masse et de de l'impulsion :

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot n_\alpha V_\alpha = 0 \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} n_\alpha m_\alpha \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + n_\alpha m_\alpha V_\alpha \cdot \nabla V_\alpha = & -\nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha + n_\alpha q_\alpha \left( E + \frac{V_\alpha \times B}{c} \right) \\ & - \sum_\beta n_\alpha m_\alpha (V_\alpha - V_\beta) \langle v_{\alpha\beta} \rangle \end{aligned} \quad (6.11)$$

où  $V_\alpha$ ,  $m_\alpha$ ,  $q_\alpha$  et  $n_\alpha$  sont respectivement la vitesse moyenne, la masse, la charge et la densité numérique des particules  $\alpha$ . J'ai par ailleurs introduit la force de Lorentz, un tenseur de pression  $\mathcal{P}_\alpha$  représentant les collisions de particules de la même espèce, et un terme de frottement visqueux pour les collisions entre particules d'espèces différentes, quantifié par le taux de collision  $\langle v_{\alpha\beta} \rangle$ .



Le passage à une description monofluide se fait en utilisant des variables reflétant les propriétés moyennes du fluide :

- La densité massique

$$\rho_m = n_e m_e + n_i m_i \quad (6.12)$$

- La densité de charge

$$\rho_q = e(n_i - n_e) \quad (6.13)$$

- La vitesse dans le centre de masse

$$\mathbf{V} = \frac{n_e m_e \mathbf{V}_e + n_i m_i \mathbf{V}_i}{n_e m_e + n_i m_i} \quad (6.14)$$

- La densité de courant totale

$$\mathbf{J} = e(n_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e) \quad (6.15)$$

- La pression dans le référentiel du centre de masse, définie à partir des pressions ioniques et électroniques dans le centre de masse :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_i^{CM} + \mathcal{P}_e^{CM} \quad (6.16)$$

Il convient dès lors de faire plusieurs hypothèses sur les processus que l'on va étudier. Tout d'abord on supposera que ces processus ont des tailles typiques largement supérieures à la longueur de Debye, de sorte que l'on puisse supposer l'électroneutralité en tout point du fluide :

$$n_e = n_i \equiv n \quad (6.17)$$

De plus, on supposera que la vitesse de dérive des électrons par rapport aux ions  $\mathbf{v}_d = \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e$  est négligeable par rapport à la vitesse typique des ions  $\mathbf{V}_i$ . Ce dernier point permettra de décrire l'ensemble du plasma, ions et électrons, comme un seul fluide, où les collisions ion-électron sont suffisamment fréquentes pour obtenir une description statistiquement cohérente de l'ensemble. Le mouvement des électrons se ramènera alors simplement à la description du courant de conduction. Notons enfin qu'en pratique, le rapport  $m_e/m_i$  est beaucoup plus petit que 1, ce qui permettra de supposer que les ions dominent l'inertie du fluide.

Ces hypothèses permettent alors d'écrire  $\rho_m \simeq \rho_i \equiv \rho$ ,  $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}_i$ ,  $\mathbf{J} \simeq en \mathbf{v}_d$  et d'obtenir une équation de conservation de la charge qui se réduit à la non divergence du courant. Le système d'équations final s'écrit alors sous la forme bien connue :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (6.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (6.19)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla \cdot \mathcal{P} \quad (6.20)$$

### § 6.3. Équation d'énergie, tenseur des contraintes

Pour résoudre le système précédent, il faut trouver une prescription adéquate pour la pression ionique  $\mathcal{P}$ . Dans le cas présent, on décomposera ce tenseur comme un terme de pression isotrope classique  $P$  et un tenseur de contraintes  $\mathcal{T}$ , ce que l'on notera :

$$\mathcal{P}_{ij} = P \delta_{ij} - \mathcal{T}_{ij} \quad (6.21)$$

Pour décrire précisément l'évolution de la pression cinétique  $P$ , il convient normalement d'écrire une équation pour l'énergie totale du système, comprenant l'évolution de l'énergie

interne, l'énergie cinétique et magnétique, ainsi que les effets de rayonnement, conduction thermique... Cependant, cette étude ne portera ni sur les effets de chauffage dus aux différents termes de dissipation, ni sur les processus radiatifs. Ainsi, par soucis de simplification, je ferai des hypothèses basiques sur les relations de clôture. Dans le cadre de cette étude, je supposerai donc que le gaz suit l'équation du gaz parfait  $P = nkT$ , et que son évolution énergétique peut être décrite par une équation isentropique :

$$\frac{d}{dt} P \rho^{-\gamma} = 0 \quad (6.22)$$

où  $\gamma$  est le coefficient adiabatique ( $\gamma = 5/3$  pour un gaz parfait monoatomique). Remarquons toutefois qu'en toute rigueur, l'existence de phénomènes de dissipation entraînent naturellement une équation d'état où l'entropie n'est pas conservée. Cependant, comme nous ne considérerons pas les processus de refroidissement, les termes de dissipation n'entraîneront qu'un échauffement continu du fluide, ce qui n'est pas physiquement réaliste et pourra notamment entraîner une croissance de la vitesse du son qui sera problématique numériquement. Aussi, on négligera les termes de chauffage dans l'équation d'énergie de sorte que le fluide sera effectivement isentropique (sauf dans des cas très particuliers qui seront alors précisés).

D'autre part, on fera parfois l'hypothèse d'un gaz incompressible, ce qui revient à imposer :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (6.23)$$

La pression est alors un paramètre d'ajustement permettant de vérifier à tout instant l'hypothèse d'incompressibilité<sup>5</sup>. La deuxième partie du tenseur de pression généralisé  $\mathcal{P}$  fait intervenir un tenseur des contraintes, que l'on écrira en suivant Landau & Lifshitz (1959) sous la forme :

$$\mathcal{T}_{ij} = \eta_v \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right) + \zeta_v \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k}. \quad (6.24)$$

où l'on a fait intervenir le coefficient de viscosité dynamique de cisaillement classique  $\eta_v$  supposé constant dans tout le fluide, ainsi qu'une viscosité de compression  $\zeta_v$  que l'on négligera.

#### § 6.4. Loi d'Ohm

Lors de la dérivation des équations à un fluide, je n'ai pas traité la conservation de l'impulsion pour les électrons, car elle donne lieu à un résultat de nature différente des équations dynamiques classiques. Pour la dériver, on écrit la conservation de l'impulsion (6.11) pour les électrons, dans le référentiel du centre de masse (référentiel des ions) :

$$n m_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -n e \left( \mathbf{E}^{CM} + \frac{\mathbf{V}_e}{c} \times \mathbf{B}^{CM} \right) - \nabla \cdot \mathcal{P}_e^{CM} - n m_e \mathbf{V}_e \langle v_{ie} \rangle \quad (6.25)$$

En remarquant que dans le référentiel des ions,  $\mathbf{v}_d = -\mathbf{V}_e$ , l'équation du mouvement (6.25) revient à écrire en fonction du courant  $\mathbf{J}$  :

$$\mathbf{E} = \frac{m_e \langle v_{ie} \rangle}{n e^2} \mathbf{J} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c n e} - \frac{\nabla \cdot \mathcal{P}_e}{n e} + \frac{m_e}{e^2 n} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (6.26)$$

où l'on reconnaîtra une expression généralisée de la loi d'Ohm dans le référentiel des ions. En particulier, on verra dans le membre de droite différents termes qui peuvent être plus ou moins négligés suivant la physique que l'on veut représenter. Ainsi, le premier terme est le terme de

<sup>5</sup>On peut voir la pression dans le cas incompressible comme un multiplicateur de Lagrange.

résistivité ohmique, bien connu dans la loi d'Ohm classique  $U = RI$ . Le second terme décrit l'effet Hall, formant un champ électrique perpendiculaire au courant et au champ magnétique (champ de Hall). Le troisième terme est un effet de pression électronique pouvant engendrer un courant. Enfin le dernier terme concerne un effet inertiel des électrons, pouvant par exemple être à l'origine des oscillations plasma décrites précédemment. Notons que dans le cas d'un milieu faiblement ionisé, on devrait rajouter un terme de frottement entre les espèces chargées et les espèces neutres sous la forme d'un nouveau terme de résistivité, dit de diffusion ambipolaire.

La clôture du système d'équation précédent nécessite de connaître la dynamique du champ électrique  $E$  en fonction des mouvements du fluide  $V$  ainsi que des déplacements de charge  $J$ . On fait donc appel aux équations de Maxwell.

### § 6.5. Équations de Maxwell

De manière tout à fait générale, les équations de Maxwell s'écrivent dans le vide, en utilisant le système d'unités de Heaviside-Lorentz (Jackson 1975) :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_q, \quad (6.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.29)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.30)$$

On remarquera que les équations (6.28) et (6.30) impliquent que le terme de courant de déplacement [dernier terme de l'équation 6.30] est d'ordre  $V^2/c^2$  par rapport aux autres termes de l'équation, et il sera donc négligé dans une étude non relativiste<sup>6</sup>. On retrouvera alors le théorème d'Ampère :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (6.31)$$

Les équations (6.28) et (6.31) permettent finalement de fermer le système d'équation.

<sup>6</sup>Cette approximation est cohérente avec l'hypothèse d'électronneutralité. En effet, la divergence de (6.30) nous permet de retrouver l'équation de conservation de la charge (6.19)

### § 6.6. Les équations de la MHD

Pour conclure cette section, on obtient les équations de la MHD que l'on écrira de la manière la plus générale possible dans le référentiel de l'observateur :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (6.32)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} + \nabla \cdot \mathcal{T} \quad (6.33)$$

$$\frac{d}{dt} P \rho^{-\gamma} = 0 \quad (6.34)$$

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{cne} - \frac{\nabla \cdot \mathcal{P}_e}{ne} + \frac{m_e}{e^2 n} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (6.35)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.36)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (6.37)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.38)$$

où l'on a utilisé les formules de transformation du champ électrique dans un changement de référentiel Galiléen :  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}/c$  et où  $\sigma = ne^2/m_e \langle v_{ie} \rangle$ , est la conductivité du milieu. On peut alors simplifier ce système suivant le système physique considéré, ce que je vais faire pour les disques d'accrétion.

## § 7. Application des équations MHD à la physique des disques d'accrétion

### § 7.1. Vérification des approximations MHD

Comme on vient de le voir, les équations de la MHD font appel à une série d'approximations que l'on va vérifier pour notre étude. Tout d'abord, il faut noter que les ordres de grandeurs varient suivant les objets astrophysique que l'on considère. Ainsi, on trouvera

$$n \sim 10^{13} \text{ cm}^{-3} \quad (7.39)$$

$$T \sim 2 \times 10^3 \text{ K} \quad (7.40)$$

à une distance  $r \simeq R_\odot \sim 10^{12} \text{ cm}$  de l'étoile centrale pour un disque protostellaire, et :

$$n \sim 10^{13} \text{ cm}^{-3} \quad (7.41)$$

$$T \sim 2 \times 10^4 \text{ K} \quad (7.42)$$

à  $r \simeq 300r_g \sim 10^{16} \text{ cm}$  pour un disque autour d'un trou noir de  $10^8 M_\odot$  (Ferreira 1995). En pratique, ces valeurs pourront varier de plusieurs ordres de grandeur selon l'endroit du disque que l'on considère. Aussi, les valeurs que je propose ici sont données à titre purement informatif et on pourra faire appel à un model complet de disque pour obtenir des profils physiques précis.

Les phénomènes que l'on cherche à décrire auront une taille typique de l'ordre de l'échelle de hauteur  $H$  du disque, c'est à dire  $10^{-1}$  à  $10^{-3}$  fois la distance  $r$  de l'objet central, et un temps typique de l'ordre de la période orbitale  $\Omega_K^{-1}$ , soit  $10^5 \text{ s}$  pour une étoile jeune et  $10^7 \text{ s}$  pour un trou noir supermassif. Par ailleurs, on supposera que l'amplitude du champ magnétique dans ces objets est voisine de l'équipartition entre l'énergie cinétique et l'énergie magnétique, soit  $B^2 \sim P$ . Le calcul des grandeurs caractéristiques du plasma présent dans ces disques (Tab. 1) montre alors

clairement les approximations MHD sont vérifiées à un très bon niveau d'approximation pour les échelles typiques des disques.

	Disque protostellaire	Trou noir supermassif
$\lambda_D$ (cm)	$7 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-6}$
$g$	0,3	$10^{-2}$
$\omega_{ci}$ (Hz)	$10^4$	$5 \times 10^4$
$\omega_{pe}$ (Hz)	$10^{11}$	$10^{11}$
$v_d$ (cm/s)	$10^{-3}$	$3 \times 10^{-10}$

TAB. 1. Évaluation des quantités caractéristiques du plasma dans deux classes de disque d'accrétion typiques.

### § 7.2. Approximation de la loi d'Ohm

De plus, ces quantités caractéristiques permettent d'estimer l'ordre de grandeur relatif des différentes composantes de la loi d'Ohm. On obtient ainsi, en comparant les termes du membre de droite de (6.35) à  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}/c$ , les ordres de grandeur suivants :

**Résistivité:**

$$\frac{|\sigma \mathbf{V} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{J}c|} \sim \frac{L_0 V_0 \sigma}{c^2} \quad (7.43)$$

**Effet Hall:**

$$\frac{|ne \mathbf{V} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}c|} \sim \omega_{ci} t_0 \frac{V_0^2}{V_A^2} \quad (7.44)$$

**Pression électronique:**

$$\frac{|ne \mathbf{V} \times \mathbf{B}|}{c |\nabla \cdot \mathcal{P}_e|} \sim \omega_{ci} t_0 \frac{V_0^2}{C_s^2} \quad (7.45)$$

**Inertie électronique:**

$$\frac{e^2 n |\mathbf{V} \times \mathbf{B}|}{m_e c |\partial \mathbf{J} / \partial t|} \sim \frac{L_0^2 \omega_{pe}^2}{c^2} \quad (7.46)$$

où l'on a défini la vitesse d'Alfvén  $V_A^2 = B^2 / 4\pi n m_i$  et la vitesse du son  $C_s^2 = \gamma p / \rho_m$ . On pourra notamment reconnaître dans l'ordre de grandeur de la résistivité le nombre de Reynolds magnétique, que l'on utilisera dans la suite. En utilisant les valeurs de conductivité de Spitzer (1962)<sup>7</sup> d'obtenir :

$$\sigma = \frac{1,37 \times 10^8 T^{3/2}}{\ln \Lambda} \text{ s}^{-1} \quad (7.47)$$

avec le logarithme coulombien  $\ln(\Lambda) \sim 6$ , on obtient pour les disques les ordres de grandeurs du tableau (2).

Ainsi, il semble que tous les termes que l'on a considérés sont négligeables dans la loi d'Ohm. En ce sens, la plupart des études MHD effectuées sur ces objets se sont placées dans le cadre de la MHD « idéale », c'est à dire en fixant à 0 le membre de droite de (6.35). Cependant, comme je le montrerai à travers quelques exemples, les termes dissipatifs peuvent avoir une certaine importance sur les grandes échelles. En particulier, dans le cas d'un gaz faiblement ionisé, la conductivité peut diminuer notablement, et entraîner l'apparition de zones non couplées au champ magnétique ou *dead zones* (Gammie 1996).

<sup>7</sup>Approximation très grossière dans les disques d'étoiles jeunes, mais qui n'est destinée qu'à illustrer mes propos

Terme	Disque protostellaire	Trou noir supermassif
Résistivité	$2 \times 10^9$	$2 \times 10^{16}$
Effet Hall	$10^9$	$5 \times 10^{11}$
Pression électronique	$10^9$	$5 \times 10^{11}$
Inertie électronique	$10^{23}$	$10^{31}$

**TAB. 2.** Évaluation de l'ordre de grandeurs des termes présents dans la loi d'Ohm.

Notons que le terme de diffusion ambipolaire (collisions entre les particules neutres et les ions) pouvant apparaître dans les milieux qui ne sont pas totalement ionisés n'a pas été pris en compte dans ce modèle simplifié. On pourra ainsi trouver une quantification précise de ces termes pour les disques protoplanétaires dans Balbus & Terquem (2001) et Kunz & Balbus (2004).

Dans ce travail, j'ai choisi d'utiliser une formulation MHD résistive, en négligeant les termes Hall et de pression magnétique (l'inertie magnétique étant toute à fait négligeable dans les plasma astrophysiques). On notera donc ici que l'approche MHD résistive est une approche incomplète du problème, car les termes Hall, de pression électronique ou de diffusion ambipolaire dans les milieux faiblement ionisés (Salmeron 2004) peuvent être du même ordre de grandeur que le terme résistif. Elle reste cependant la plus simple et permet d'obtenir une première approche du rôle des termes dissipatifs dans les phénomènes de transport des disques. Pour finir, on écrira donc l'ensemble des équations de la MHD, en supposant que la résistivité est constante dans tout le fluide<sup>8</sup> :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (7.48)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi} + \nabla \cdot \mathcal{T} \quad (7.49)$$

$$\frac{d}{dt} p \rho^{-\gamma} = 0 \quad (7.50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} \quad (7.51)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (7.52)$$

où l'on a noté  $\eta = c^2/4\pi\sigma$  le coefficient de résistivité du fluide. C'est ce système d'équation que j'utiliserai dans la suite de ce manuscrit pour décrire la dynamique des disques d'accrétion.

## 2. Modèle local, approximation de Hill

### § 8. Nécessité d'un modèle local

La présente étude est axée sur la turbulence locale dans les disques astrophysiques. On entend par turbulence locale, une turbulence dont la longueur de cohérence typique n'excède pas quelques fois la hauteur locale du disque  $H$ . Dans cette approche, on suppose donc que le rapport d'anisotropie de la turbulence mise en jeu est voisin de 1. Dans le cas contraire, on sera contraint de se ramener à une modélisation globale du disque. Dans la mesure où les disques

<sup>8</sup>Cette hypothèse n'est pas forcément vérifiée pour un gaz ionisé, mais nous la supposons valide tout au long de ce manuscrit.

que l'on étudiera sont froids, le rapport  $H/R$  sera compris entre  $10^{-1}$  et  $10^{-3}$ , de sorte que la taille typique des mouvements turbulents sera négligeable par rapport au rayon du disque.

Avec cette approche, on peut obtenir des équations locales cartésiennes du disque : c'est le système de Hill (1878), développé initialement pour étudier les mouvements de la lune. Ce système a été utilisé avec succès pour étudier d'autres objets tels que les bras spiraux galactiques (Goldreich & Lynden-Bell 1965), les anneaux de planètes (Wisdom & Tremaine 1988) et les écoulements en rotation différentielle tels que les disques (Narayan *et al.* 1987).

### § 9. Développement des équations locales

La dérivation complète des équations du modèle de Hill est donnée en Annexe A. On peut néanmoins les obtenir par une approche qualitative de la physique d'un disque d'accrétion.

Pour cela, on se positionne à un point de référence situé à un rayon  $R_0$  de l'objet central et on suppose que les processus étudiés ont une taille de l'ordre de  $H \ll R_0$ . Cette première approximation permet de négliger les termes de courbure d'ordre  $H/R_0$ . On se place alors en corotation avec le disque en  $R_0$ , avec un vecteur rotation  $\mathbf{\Omega} = \Omega(R_0)\mathbf{e}_z$ . Ceci introduit une force de Coriolis ainsi qu'un terme centrifuge, lequel est supposé équilibrer l'attraction gravitationnelle en  $R_0$ . Deux termes gravitationnelles restent alors dans ce système : un terme de marée, dû à la variation de la force gravitationnelle avec le rayon, ainsi qu'un terme d'attraction vertical qui maintient le disque confiné. On aboutit finalement au système de Hill que l'on écrit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla\right) \mathbf{U} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} + 2\Omega_0 S y \mathbf{e}_y \\ &\quad - 2\Omega_0 \times \mathbf{U} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_z + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathcal{T} \end{aligned} \quad (9.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} \quad (9.54)$$

$$\frac{d}{dt} P \rho^{-\gamma} = 0 \quad (9.55)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (9.56)$$

où l'on a noté le potentiel gravitationnel  $\psi$  et  $S = -(rd\Omega/dr)_{R_0}$  le cisaillement moyen de l'écoulement laminaire dû à l'effet de marée gravitationnelle. On vérifiera en effet qu'une solution des équations précédentes est  $\mathbf{U} = Sy\mathbf{e}_x$ . De plus, pour un écoulement Képlerien ( $\Omega \propto r^{-3/2}$ ), on aura  $S = 3/2\Omega$ .

Ainsi, l'étude locale de la dynamique d'un disque d'accrétion revient à étudier la dynamique d'un écoulement de Couette plan tournant magnétisé et stratifié verticalement. Remarquons cependant que dans cet écoulement, le cisaillement est imposé par la force gravitationnelle via le terme  $Sy\mathbf{e}_y$  du système d'équations précédent. Il s'agit donc d'un forçage *en volume* de l'écoulement. Ceci est différent de l'écoulement de Couette plan classique où le cisaillement est introduit par les conditions aux limites (murs) et est transmis dans le fluide par une viscosité moléculaire ou turbulente. Aussi, les états turbulents quasi-stationnaires qui peuvent être observés dans les écoulements de Couette, et qui montrent un profil de vitesse déformé n'existeront pas dans les écoulements locaux que je discute ici.

On comprend aussi par cette remarque que la source d'énergie de l'écoulement vient de ce terme de forçage et donc *in fine* de l'énergie gravitationnelle. Ainsi, un écoulement turbulent



qui tire son énergie du cisaillement finit par enlever de l'énergie gravitationnelle au fluide en la convertissant en chaleur : le gaz tombe. Cet effet d'accrétion n'est néanmoins pas représenté dans le système de Hill car il fait intervenir les termes de courbure qui ont été négligés.

Remarquons finalement que je n'ai pas discuté les conditions aux limites à utiliser dans ce système. Physiquement, ces conditions aux limites sont difficiles à déterminer car il faut définir une coupure, plus ou moins brutale, dans la direction radiale du disque. Idéalement, les conditions aux limites ne devraient pas avoir d'influence sur l'écoulement local. Malheureusement, aucune des conditions aux limites envisageable (conditions aux limites libres, rigides, périodiques-cisaillées) n'est exempte d'effet parasite sur l'écoulement. Ainsi, lorsque c'est possible, je me bornerai à utiliser différents types de conditions aux limites et à tester, par comparaison, leur influence sur les caractéristiques de l'écoulement. Cette approche permettra, à défaut de mieux, d'estimer l'erreur causée par ces effets de bords sur les résultats.

## § 10. Equilibre vertical, compressibilité

Au début de cette section, j'ai supposé que les mouvements turbulents devaient avoir une taille typique de l'ordre de l'échelle verticale du disque  $H$ . Cette échelle peut être obtenue d'après l'équation du mouvement (9.53) en écrivant l'équilibre hydrostatique vertical :

$$\partial_z P = -\rho \partial_z \psi \quad (10.57)$$

avec le potentiel  $\psi$  :

$$\psi(r, z) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (10.58)$$

où  $M$  est la masse de l'objet central et  $G$  la constante de gravitation. Ainsi, on peut écrire au rayon de référence  $R_0$  et pour  $z \ll R_0$  :

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \simeq \frac{z}{R_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} = z \Omega_0^2 \quad (10.59)$$

Si on suppose que le disque est isotherme verticalement<sup>9</sup>, c'est à dire  $P = c_s^2 \rho$  où  $c_s$  est la vitesse du son, on obtient l'équilibre hydrostatique :

$$P = \alpha \exp \left( -\frac{z^2 \Omega_0^2}{2c_s^2} \right) \quad (10.60)$$

Ceci nous permet alors de définir une échelle de hauteur  $H = c_s \Omega_0^{-1} \simeq c_s S^{-1}$ , qui servira d'échelle typique pour les phénomènes turbulents (cette échelle étant la seule échelle caractéristique du problème local, la taille des processus étudiés sera *nécessairement* reliée à cette échelle). Par ailleurs, la source d'énergie cinétique pour les mouvements turbulents dans le système d'équations de Hill (9.53)-(9.54) sera essentiellement le cisaillement  $S$ , dont on a vu qu'il prenait sa source dans l'énergie gravitationnelle du disque. Ainsi, pour des mouvements d'une taille de l'ordre de  $H$ , on s'attend naturellement à des vitesses de l'ordre de la vitesse du son, ce qui signifie une turbulence approximativement subsonique. Ce résultat est corroboré par les

<sup>9</sup>Cette hypothèse est fréquente dans l'étude des disques d'accrétion minces, et justifiable sur la base de l'examen des échelles de temps verticale et radiale



valeurs de  $\alpha$  fournies par les observations. En effet, pour des mouvements turbulents d'une taille typique  $H$  et d'une vitesse typique  $v$ , on peut estimer un coefficient de viscosité turbulente par :

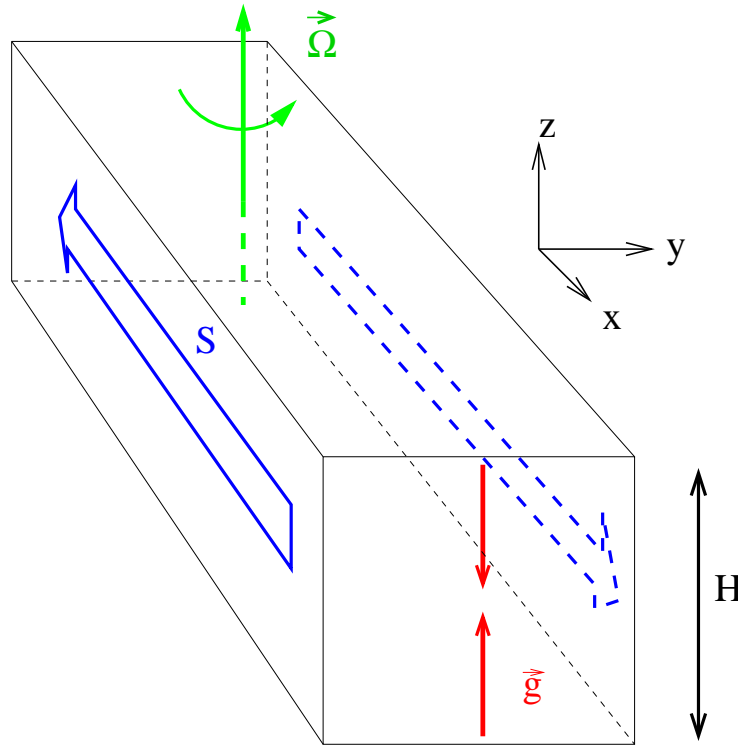
$$\tilde{\nu} \sim vH. \quad (10.61)$$

La comparaison avec la prescription  $\nu_t = \alpha c_s H$  montre alors clairement que les contraintes observationnelles  $\alpha < 1$  impliquent une turbulence subsonique. En raison de ces résultats, je ferai la plupart du temps l'hypothèse que l'écoulement est incompressible.

Remarquons cependant qu'en pratique, les effets de compressibilité devraient générer des ondes sonores ou des chocs, entraînant une dissipation plus rapide de l'énergie que dans le cas incompressible. Ainsi, on pourra considérer que les résultats sur l'efficacité de la turbulence incompressible sont des valeurs « hautes » si on les compare avec l'écoulement réel.

### 3. Méthodologie

Pour résumer ce chapitre, on trouvera sur la figure (9) l'écoulement typique décrit par les équations (9.53) et (9.54). On y retrouvera le cisaillement de vitesse  $S$ , la stratification verticale  $\mathbf{g} = -z\Omega_0^2 \mathbf{e}_z$  et la rotation  $\Omega_0 \mathbf{e}_z$ . Le champ magnétique n'a pas été représenté et il pourra adopter une topologie *a priori* quelconque.



**FIG. 9.** Écoulement caractéristique décrit par le système de Hill, avec en rouge la stratification verticale, en bleu le cisaillement de vitesse et en vert la rotation.

Il semble clair que l'on ne peut pas prétendre maîtriser une simulation en intégrant tous les phénomènes physiques mis en avant par le modèle de Hill. Cette remarque peut aussi s'appliquer aux calculs analytiques, ainsi qu'aux manipulations. Aussi, j'adopterai ici une

approche par étapes : j'inclurai progressivement les effets physiques de l'écoulement décrit par le modèle de Hill à un écoulement « minimal », qui sera l'écoulement de Couette tournant, combinant uniquement cisaillement et rotation. Cette écoulement me permettra d'étudier l'instabilité hydrodynamique sous-critique (partie 3). Par la suite, j'ajouterai à l'écoulement minimal les effets de stratification verticale. Cet écoulement donnera lieu à une nouvelle instabilité potentielle : l'instabilité strato-rotationnelle (partie 4). Dans la cinquième partie, j'éliminerai la stratification du problème et j'inclurai le couplage avec un champ magnétique. Ce dernier élément mènera alors à l'instabilité magnéto-rotationnelle.

Remarquons pour finir que la plupart de ces études feront appels à des méthodes numériques variées, dont certaines ont été développées spécifiquement pour ce travail. Aussi, je présenterai dans la deuxième partie de ce manuscrit les méthodes numériques utilisées dans les parties suivantes, en insistant sur la pertinence physique des algorithmes employés.



# Partie II

## Méthodes numériques

3	Les approches numériques en mécanique des fluides	29
4	Méthodes aux différences finies	37
5	Méthodes spectrales	59



# 3

## Les approches numériques en mécanique des fluides

« Informatique : Alliance d'une science  
inexacte et d'une activité humaine faillible »

— L. Fayard

Dictionnaire impertinent des branchés

### Plan du chapitre

1. Bases de l'intégration numérique .....	29
§ 11. Introduction .....	29
§ 12. Équation modèle .....	30
2. Méthodes à discrétisation spatiale .....	31
§ 13. Approche des différences finies .....	31
§ 14. Approche des volumes finis .....	32
§ 15. Approche particulière .....	33
3. Approche spectrale .....	34
4. Quelles méthodes pour quelles simulations? .....	35

### 1. Bases de l'intégration numérique

#### § 11. Introduction

**L**ES MÉTHODES NUMÉRIQUES ONT ÉTÉ UTILISÉES DEPUIS L'ANTIQUITÉ pour l'évaluation de quantités utilisées dans la vie courante (dans l'architecture notamment). Citons par exemple l'évaluation du rapport de la diagonale du carré par rapport à son côté par les babyloniens 2000 ans avant notre ère. On le voit, la mesure de certaines quantités mathématiques *a priori* abstraites a été un des premiers problèmes de l'Homme. Ces méthodes ont par la suite été formalisées pour traiter certains problèmes précis (Par exemple les méthodes de Newton ou d'Euler). L'avènement de l'informatique à partir de 1950 a donné une nouvelle dimension à cette approche et a permis de traiter des problèmes de plus en plus complexes grâce à l'accroissement rapide de la puissance de calcul disponible.

En termes modernes, le but de ces méthodes est d'évaluer numériquement une quantité qui est solution d'une équation plus ou moins complexe. Les domaines d'applications sont

extrêmement larges et vont de la dynamique des populations humaines aux marchés financiers en passant par la physique subatomique. De manière générale, les approches numériques permettent de résoudre *de manière approchée* des problèmes où l'approche analytique échoue. On notera cependant que, vu le nombre de problèmes auxquels peuvent s'appliquer ces méthodes, il est important de cibler précisément le problème posé, et de connaître en partie la solution que l'on pense obtenir. En effet, une méthode peut exceller dans un domaine donné et être de bien piètre qualité dans le domaine dans lequel on veut trouver une solution.

Dans notre cas, le problème posé est essentiellement un problème de dynamique des fluides, éventuellement magnétisés. Dans la suite de ce chapitre je tenterai de décrire différentes méthodes numériques utilisées en physique pour calculer la dynamique de ce type d'écoulements. Je mettrai en particulier l'accent sur les possibilités et les limites de ces méthodes et je montrerai en quoi les choix effectués pour ce travail sont pertinents.

## § 12. Équation modèle

Notons  $Q(x_i, t)$  le vecteur à  $n$  composantes décrivant le fluide aux coordonnées  $x_i$  et à l'instant  $t$ . On peut alors décrire l'évolution du fluide par un ensemble d'équations tels que :

$$\partial_t Q(x_i, t) = G(Q(x_i, t)) \quad (12.62)$$

Ce problème n'est complet que lorsque l'on a défini un état initial  $Q(x_i, t_0) = Q_0(x_i)$  et des conditions aux limites à tout instant  $t$ . La fonction  $G$  introduite dans (12.62) ne dépend que de  $Q(x_i, t)$  et de ses dérivées spatiales, mais peut faire intervenir des termes non linéaires. Remarquons de plus que l'écriture de l'équation (12.62) est donnée en variables eulériennes, ce qui suppose que l'on ne suivra pas numériquement les particules fluides. En fait, certaines formulations peuvent faire appel à des variables lagrangiennes (voir par exemple § 15). Cependant, ce type d'approche ne modifie pas fondamentalement le principe de l'intégration numérique que je présente ici.

On commence tout d'abord par discrétiser l'opérateur d'évolution temporelle. En pratique, on fera évoluer d'un pas de temps  $dt$  la solution  $Q(x_i, t)$  vers  $Q(x_i, t + dt)$  en évaluant le terme  $G(Q(x_i, t))$  :

$$Q(x_i, t + dt) = Q(x_i, t) + \mathcal{H}(G(Q), dt) \quad (12.63)$$

$\mathcal{H}$  dépend de la méthode d'intégration temporelle<sup>10</sup> utilisée, de la précision recherchée et de considérations de stabilités. Ces points seront discutés pour les méthodes utilisées dans cette thèse par la suite.

La deuxième étape dans l'établissement d'un schéma d'intégration est la discrétisation de l'opérateur de différenciation spatiale  $G$ . Comme je le montrerai, la différenciation spatiale peut revêtir différentes formes. Cette discrétisation dépend de la géométrie du problème, de la précision voulue, des conditions aux limites et de la physique mise en jeu dans les solutions recherchées.

Pour finir, notons que la séparation temporelle/spatiale présentée ici par soucis de simplification n'est pas forcément évidente en pratique. Certains schémas, tels que les volumes

<sup>10</sup>Nous n'utiliserons ici que des méthodes d'intégration temporelles explicites, ce qui nous permettra d'écrire (12.63). Il existe néanmoins des méthodes implicites, que l'on écrira sous la forme générale  $\mathcal{H}(Q_{t+dt}, Q_t) = 0$

finis, font ainsi appel à une intégration mixte des termes temporels et spatiaux. Cependant, pour mon étude, cette séparation me sera très utile et me permettra de mettre en évidence les origines de problèmes rencontrés dans plusieurs schémas d'intégration.

Poursuivant la logique présentée ici, je vais séparer les méthodes de discrétisation de l'opérateur  $G$  en deux grandes classes : les méthodes spatiales et les méthodes spectrales.

## 2. Méthodes à discrétisation spatiale

L'approche la plus simple pour discrétiser un problème est de décomposer la fonction  $Q(x_i, t)$  sur un ensemble de points de contrôle répartis dans l'espace. On cherche alors à décrire l'évolution de la solution en chacun des points.

### § 13. Approche des différences finies

L'approche aux différences finies est de loin la plus intuitive : on utilise une grille fixe pour discrétiser l'espace, et la solution est évaluée en chacun des points de grille. On calcule alors l'évolution de la solution en utilisant une forme discrète de l'équation (12.62) que l'on écrira sous la forme :

$$\partial_t Q_i(t) = \tilde{G}(Q_{i-k}(t), \dots, Q_{i+l}(t)) \quad (13.64)$$

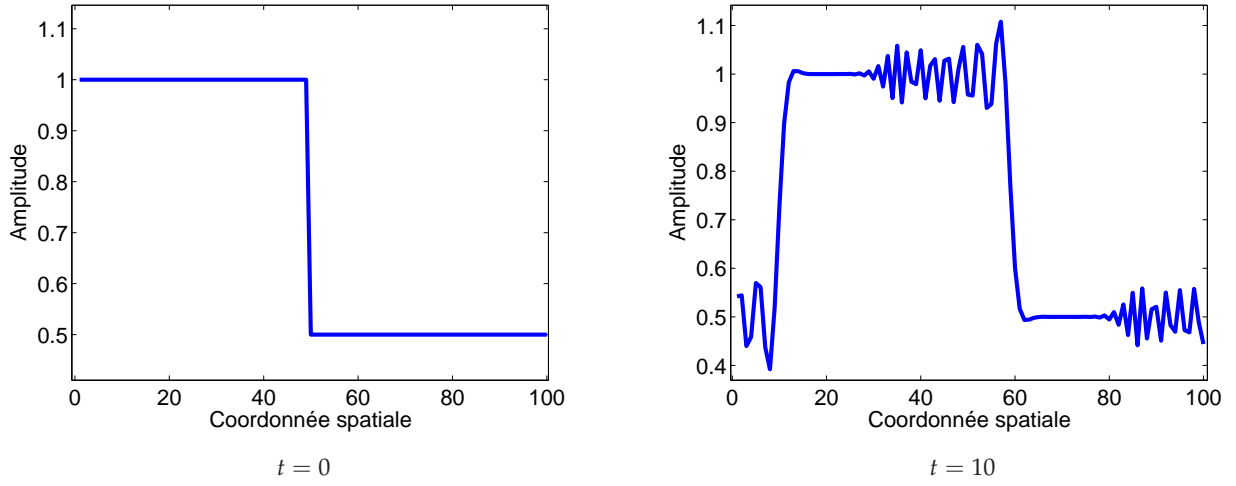
où  $\tilde{G}$  est l'opérateur différences finies équivalent à  $G$ .  $\tilde{G}$  dépend de la solution  $Q$  en chacun des point  $x_j$ , notée  $Q_j$ . Plus concrètement, le passage en différences finies se fait en remplaçant les opérateurs de différentiation spatiale par leurs équivalents en différences finies, qui sont des fonctions linéaires des solutions  $Q_j$  au voisinage du point que l'on considère. On pourra alors écrire de manière générale :

$$\frac{\partial^{(p)} Q(x_i, t)}{\partial x^p} = \sum_{j=i-k}^{i+l} \alpha_j^p Q_j(t) \quad (13.65)$$

Le choix des  $\alpha_j^p$  dépend du problème physique considéré et en particulier de la nature précise de l'équation à résoudre comme nous le verrons dans la suite. Ils dépendent aussi de la précision voulue dans l'évaluation de l'opérateur.

Un des avantages majeurs de la méthode aux différences finies est sa simplicité, ce qui permet de traiter relativement facilement une grande variété de problèmes. De plus, on peut assez simplement obtenir une précision accrue sur les opérateurs de différentiation spatiale, sous certaines contraintes de régularité de la solution. Cependant, il existe des cas pour lesquels les opérateurs différences finies ne donnent pas les résultats physiques auxquels on pourrait s'attendre. Par exemple, l'existence de discontinuités (chocs, changement de milieu) ou de forts gradients peut engendrer de fortes erreurs dans les formules de différences finies et peuvent notamment donner lieu à la formation d'oscillations en aval des chocs (voir Fig. 10). D'autre part, ces méthodes ne tiennent pas compte *a priori* de l'existence de lois de conservations. Ainsi, la masse ou l'énergie totale ne sont en principe pas conservées dans les schémas aux différences finies en raison des erreurs numériques d'intégration. On notera cependant qu'il est toujours possible de développer des méthodes aux différences finies conservatives, sous certaines contraintes.





**FIG. 10.** Exemple d'oscillation due à la présence d'un choc dans une méthode aux différences finies. Résolution d'une équation d'advection  $\partial_t u + \partial_x u = 0$  avec une intégration temporelle de type Runge-Kutta d'ordre 4 et une dérivation spatiale centrée d'ordre 5.

### § 14. Approche des volumes finis

Dans l'approche des volumes finis, on considère, de la même manière qu'en différences finies, une grille fixe dans l'espace. Cependant, au contraire des différences finies, les valeurs des variables sur les points de grille sont les *valeurs moyennes locales* des solutions du problème physique. Dans cette approche, on doit donc définir un ensemble de volumes de contrôle (rattachés aux points de contrôle) à l'intérieur desquels la moyenne est calculée.

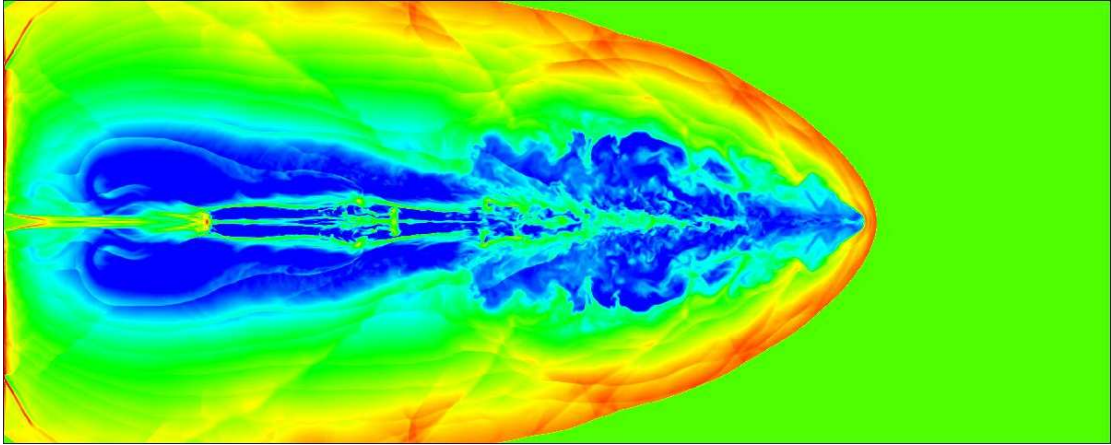
Cette approche a certains avantages en mécanique des fluides, notamment en raison de l'existence de quantités conservées par les équations. En effet, dans la plupart des cas, on pourra écrire les équations fluides sous la forme :

$$\partial_t P = \nabla \cdot F(P) + S(P) \quad (14.66)$$

dite « forme conservative » de l'équation (12.62).  $P$  est une fonction arbitraire de la variable  $Q$  définie précédemment,  $F$  est la fonction de flux, et  $S$  est le terme source du système. Dans le cas unidimensionnel, en intégrant spatialement et temporellement l'équation (14.66), il vient :

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} P(t_{n+1}, x) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} P(t_n, x) dx &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(x_{j+1/2}, t) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(x_{j-1/2}, t) dt \\ &+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} S(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (14.67)$$

Dans cette expression, on reconnaîtra dans le membre de droite les variables volumes finis  $P_j(t_{n+1})$  et  $P_j(t_n)$ . Cette équation *exacte* décrit donc l'évolution temporelle des variables volumes finis en fonction des fonctions de flux intégrées temporellement et des termes sources. Toute la difficulté réside alors dans l'évaluation de ces termes, et en particulier du terme de flux. Notons de plus que le problème de l'intégration temporelle est caché dans l'évaluation des fonctions de flux et des termes sources.



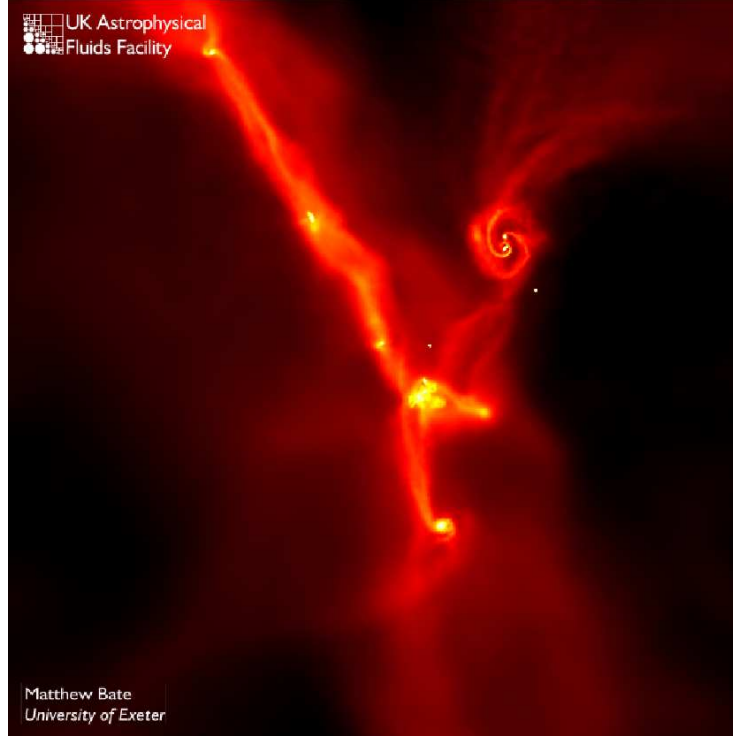
**FIG. 11.** Exemple de simulation aux volumes finis. Représentation de la densité lors de la propagation d'un jet astrophysique supersonique dans le milieu interstellaire. (Crédit G. Murphy)

De part sa forme intégrale, une méthode aux volumes finis peut facilement traiter les chocs dans le système physique sans engendrer d'oscillations parasites. De plus, de part leur forme conservative, ces méthodes permettent la conservation de certaines quantités (masse, énergie), à la précision de la machine, ce qui les rend très utiles dans les systèmes à géométrie complexe. Ces deux caractéristiques font que les méthodes des volumes finis sont très couramment utilisées en astrophysique, notamment parce que les vitesses y sont souvent supersoniques (d'où la formation des chocs) et que certaines quantités telles que la masse ou le moment cinétique doivent être conservées précisément (voir par exemple la formation d'un jet astrophysique, Fig. 11). Cependant, ces méthodes ne peuvent être que difficilement étendues à des ordres élevés, ce qui les rend moins adaptées aux écoulements sans discontinuités.

### § 15. Approche particulière

L'approche particulière fait appel à une discrétisation spatiale *mobile*. Cette méthode suppose que le fluide est constitué d'un nombre fini de particules que l'on suit dans leur mouvement. Ceci simplifie le problème de l'advection du fluide observé dans les méthodes précédentes. Cependant, l'évaluation des termes sources, et en particulier l'interaction entre les particules est assez difficile à décrire, ce qui peut engendrer certains problèmes (notamment au niveau des effets dissipatifs).

Par exemple, la méthode SPH (*Smoothed Particles Hydrodynamics*) est couramment employée en astrophysique pour des problèmes mettant en jeu une grande dynamique d'échelle et en particulier pour les milieux autogravitants (voir par exemple Fig. 12). Dans cette méthode, on suppose que les propriétés du fluide (température, pression...) en un point donné correspondent à une moyenne plus ou moins complexe des propriétés des particules fluides au voisinage de ce point. On remarquera toutefois que les écoulements magnétisés restent difficiles à simuler avec les méthodes particulières, et que les méthodes SPH-MHD sont encore en phase de développement (Price & Monaghan 2004).



**FIG. 12.** Exemple de simulation particulière de type SPH. Représentation de la densité lors de l'effondrement et la fragmentation d'un nuage interstellaire. On peut voir apparaître des cœurs denses qui donneront naissance aux étoiles ainsi que le début de la formation de structures d'accrétion. D'après Bate *et al.* (2002).

### 3. Approche spectrale

Dans les cas où la forme de la solution attendue est connue et avec des géométries simples (sphérique, cartésienne), on peut projeter la solution sur une base de fonctions orthogonales respectant la symétrie et les conditions aux limites. On discrétise alors le problème en choisissant un sous ensemble fini de la base de projection et on réécrit les équations du problème sur cette base.

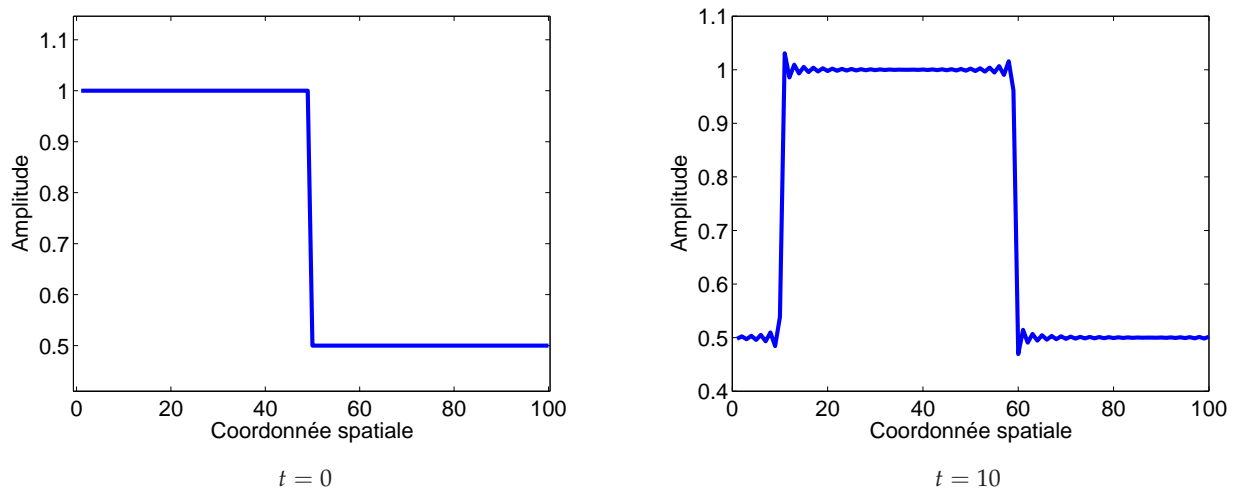
Un des avantages de cette méthode est que l'on peut dans la plupart des cas avoir des expressions simples et exactes des opérateurs de dérivation sur les éléments de la base. Par exemple, si l'on utilise une base de Fourier

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (15.68)$$

l'opérateur de dérivation spatiale s'écrit simplement :

$$\partial_{x_j} \varphi_{\mathbf{k}} = ik_j \varphi_{\mathbf{k}} \quad (15.69)$$

On comprend alors que la précision spatiale de ces méthodes est extrêmement bonne, à condition que la base utilisée soit cohérente avec la solution recherchée. D'autre part, certaines conditions telles que les conditions de non divergence du champ magnétique ou d'incompressibilité peuvent être appliquées de manière simple dans l'espace spectral. Enfin, la précision élevée des opérateurs spatiaux rendent ces méthodes très peu dissipatives et permet de diminuer de manière sensible la dissipation numérique dans le schéma d'intégration. Pour ces raisons, les méthodes spectrales ont été utilisées en mécanique des fluides depuis les années 1970 pour



**FIG. 13.** Exemple d'oscillation due à la présence d'une discontinuité dans une méthode spectrale. Résolution d'une équation d'advection  $\partial_t u + \partial_x u = 0$  avec une intégration temporelle de type Runge-Kutta d'ordre 4 et une dérivation spatiale spectrale dans l'espace de Fourier.

l'étude de la turbulence 3D et en particulier de la turbulence homogène (Orszag & Patterson 1972).

Cependant, les chocs sont ici aussi un exemple flagrant de solution ne pouvant être représentées par des bases continues tel que la base de Fourier. Ainsi, un test d'advection pour une méthode Fourier montre l'apparition d'oscillations de part et d'autre de la discontinuité (voir Fig. 13). Notons cependant que les oscillations sont beaucoup plus discrètes dans le cas des méthodes spectrales que pour les méthodes aux différences finies. D'autre part, l'utilisation des méthodes spectrales est plus coûteuse en temps de calcul que les méthodes précédentes. En effet, les calculs de dérivées nécessitent la plupart du temps des passages de l'espace réel à l'espace des fonctions de la base utilisée. Ces passages, ou *transformées*, se font par un produit de convolution, dont le temps de calcul évolue comme  $n^2$ , où  $n$  est le nombre de points de grilles (ou le nombre d'éléments de la base utilisée). Comparativement aux méthodes différences finies qui évoluent en  $n$ , les méthodes spectrales deviennent donc rapidement très coûteuses en temps de calcul. Il existe cependant pour certaines bases des transformées « rapides » permettant de réduire de manière significative le temps de calcul. Les cas des transformées de Fourier rapides, ou *FFT*, en sont un exemple typique, pour lequel le temps de calcul évolue en  $n \log n$ . En pratique, l'utilisation d'une méthode spectrale nécessitera donc l'existence d'un algorithme de transformée rapide, ce qui limitera énormément le choix des bases possibles (essentiellement les bases de Fourier et de Tchebychev).

## 4. Quelles méthodes pour quelles simulations?

On l'a vu précédemment, les méthodes utilisables pour la mécanique des fluides sont nombreuses et ont chacune un certain nombre d'avantages et d'inconvénients. Dans le cadre de ce travail de thèse, l'étude numérique est concentrée sur les phénomènes de turbulence tridimensionnelle dans un disque d'accrétion potentiellement magnétisé.

Dans ce type de problème, la maîtrise des phénomènes de dissipation numérique est extrêmement importante, comme je le montrerai par la suite. Ainsi, il faut réduire au strict minimum ces phénomènes, c'est-à-dire utiliser des méthodes dont la précision sur le calcul des dérivées est grande. D'autre part, comme je l'ai montré dans l'introduction, on s'attend à obtenir une turbulence subsonique, ce qui limite la formation de chocs dans les simulations. Ces remarques tendent à exclure naturellement les méthodes aux volumes finis, à moins d'envisager une méthode de type Godunov d'ordre élevé, complexe à implémenter (Toro *et al.* 2001). De la même manière, les méthodes *SPH* ne seront pas utilisées, notamment en raison de leur forte dissipation.

Ainsi, seules des méthodes spectrales et de différences finies d'ordre élevées sont utilisées dans ce travail de thèse, compte tenu des hypothèses initiales. Dans la suite, je développerai quelques aspects de ces méthodes, leur implémentation, et leurs limites dans notre cas.

# 4

## Méthodes aux différences finies

### Plan du chapitre

1. Fondements.....	38
§ 16. Introduction.....	38
§ 17. Développement de Taylor.....	38
2. Un cas d'école (ou presque?) : L'équation linéaire d'advection .....	39
§ 18. Schéma temporel d'Euler.....	39
§ 18.1. La stabilité des schémas centrés en question.....	39
§ 18.2. Stabilité des schémas temporels .....	41
§ 19. Schémas de Runge-Kutta.....	42
§ 20. Intérêt des formules d'ordre élevés.....	43
§ 21. Advection d'une discontinuité .....	45
§ 22. Conclusions .....	46
3. Transport non linéaire .....	48
§ 23. L'équation de Burgers.....	48
4. Implémentation d'un code hydrodynamique aux différences finies .....	49
§ 24. Équations.....	49
§ 25. Conditions aux limites.....	49
§ 25.3. Conditions aux limites rigides.....	50
§ 25.4. Conditions aux limites shearing sheet .....	51
§ 26. Tests .....	52
5. Magnétohydrodynamique .....	53
§ 27. Le problème de la divergence de $B$ .....	53
§ 28. Choix de Jauge .....	54
6. Parallélisation .....	55
§ 29. Choix d'une méthode de parallélisation .....	55
§ 30. Décomposition de domaine .....	56

## 1. Fondements

### § 16. Introduction

**L**ES MÉTHODES AUX DIFFÉRENCES FINIES sont une classe de méthodes numériques très utilisée encore aujourd'hui, malgré leurs nombreux défauts. Dans ce chapitre, je ne présenterai pas de résultat fondamentalement nouveau, et on pourra consulter Forsythe & Wasow (1964) ou encore Press *et al.* (2002) pour avoir des détails supplémentaires sur cette approche, ainsi qu'une série d'algorithmes écrits dans différents langages de programmation. L'objectif de ce chapitre est donc de présenter de manière semi-quantitative quelques éléments sur la méthode aux différences finies, appliquée à la problématique de cette thèse. De plus, quelques unes des approches numériques présentées ici seront utilisées pour décrire les méthodes spectrales du prochain chapitre.

### § 17. Développement de Taylor

Considérons une fonction  $\psi$  sur une grille unidimensionnelle dont les coordonnées des points sont notées  $x_i$  et de pas  $\delta x$  supposé constant. La méthode des différences finies consiste à trouver une expression pour les dérivées à l'ordre  $q$  de  $\psi$  en fonction des valeurs  $\psi_i = \psi(x_i)$ , ce que l'on écrira sous la forme générale :

$$(\delta x)^q \psi_i^{(q)} = \sum_{j=i-n}^{i+m} \alpha_j^{(q)} \psi_j \quad (17.70)$$

où les  $\alpha_j^{(q)}$  sont les inconnues. En utilisant les formules de Taylor jusqu'à l'ordre  $p$ , on montre facilement que :

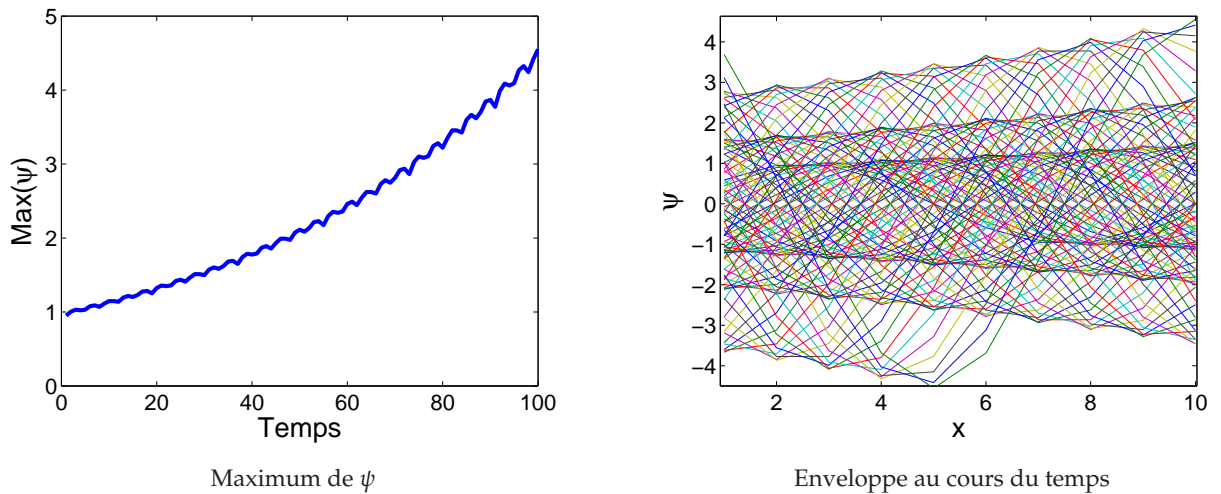
$$\psi_j = \sum_{q=0}^p \frac{(j-i)^q \delta x^q}{q!} \psi_i^{(q)} + o(\delta x^p) \quad (17.71)$$

On pourra remarquer que les équations (17.70) et (17.71) correspondent l'une et l'autre à des formulations matricielles inverses si  $p = m + n$ . En effet, on peut écrire matriciellement l'équation (17.71) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \psi_{i-n} \\ \psi_{i-n+1} \\ \vdots \\ \psi_{i+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n & n^2/2 & \dots \\ 1 & -n+1 & (n-1)^2/2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & m & m^2/2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_i' \delta x \\ \vdots \\ \psi_i^{(p)} \delta x^p \end{pmatrix} \quad (17.72)$$

En inversant la matrice intervenant dans (17.72), on obtiendra la matrice des  $\alpha_j^{(n)}$  qui sera une représentation différences finies d'ordre  $p$  des dérivées de  $\psi$ . On pourra remarquer qu'il existe *a priori* une infinité de représentations d'une dérivée à un ordre donné. Cependant, on choisira de préférence les formules faisant intervenir les valeurs de  $\psi$  au voisinage du point où l'on cherche la dérivée. Le choix précis de la formule à utiliser sera dicté par des considérations de stabilité et de convergence que l'on verra par la suite. On trouvera en annexe quelques formules différences finies dans les cas les plus courants.





**FIG. 14.** Évolution d'une fonction sinus advectée par un schéma d'Euler et une formule différences finies centrée d'ordre 2. Simulation sur 100 pas de temps et 10 points de grille. On met en évidence l'accroissement de l'amplitude de la solution : cet algorithme est instable.

## 2. Un cas d'école (ou presque?) : L'équation linéaire d'advection

Le cas de l'équation d'advection est un problème classique d'étude en mécanique des fluides. En effet, ces équations Eulériennes font intervenir systématiquement un terme de « transport » où les champs sont simplement déplacés dans l'espace. Une telle équation d'advection s'écrit :

$$\partial_t \psi + c \partial_x \psi = 0 \quad (17.73)$$

où  $c$  est la vitesse d'advection. En posant  $y = x - ct$ , on remarque que (17.73) est équivalente à  $d\psi/dy = 0$ . On montre alors facilement que la solution de (17.73) s'écrit :

$$\psi(x, t) = \psi(x_0 - c(t_0 - t), t_0) \quad (17.74)$$

ce qui est conforme à l'idée du transport de  $\psi$  à une vitesse  $c$  sur l'axe  $x$ .

### § 18. Schéma temporel d'Euler

#### § 18.1. La stabilité des schémas centrés en question

La formulation la plus simple que l'on puisse imaginer pour l'équation d'advection est d'utiliser un schéma d'intégration temporel d'Euler. Ce dernier s'écrit sous la forme intuitive :

$$\psi^{n+1} = \psi^n - c \delta t \partial_x \psi^n \quad (18.75)$$

où l'on a noté  $\psi^n$  la solution au pas de temps  $n$ . On peut alors exprimer la dérivée spatiale avec une formule de différences finies centrée du deuxième ordre. On écrira alors l'algorithme sous la forme :

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n - c \delta t \frac{\psi_{i+1}^n - \psi_{i-1}^n}{2\delta x} \quad (18.76)$$

Malheureusement, la programmation de cet algorithme test pour l'advection d'une fonction sinus montre rapidement que la solution est instable (voir Fig. 14).



Ce type de problème peut être étudié de manière systématique en utilisant l'analyse de Von Neumann. Cette analyse suppose que la fonction  $\psi$  est une fonction sinusoïdale sous la forme :

$$\psi_j^n = \Gamma^n \exp(ikj\delta x) \quad (18.77)$$

Ainsi, en injectant (18.77) dans (18.76), on trouve :

$$\Gamma^{n+1} = \Gamma^n \exp(ikj\delta x) \left( 1 - \frac{ic\delta t}{\delta x} \sin(kj\delta x) \right) \quad (18.78)$$

Cette relation montre clairement que le taux de croissance  $\tau = |\Gamma^{n+1}/\Gamma^n|$  est plus grand que 1, c'est-à-dire que la solution croît au cours du temps, et ce pour toutes les valeurs de  $c\delta t/\delta x$ . On dira alors que l'algorithme (18.76) est inconditionnellement instable.

Il est alors couramment admis que ce schéma doit son instabilité à la représentation différences finies centrée. En effet, on pourra remarquer que physiquement, on advecte en un point ce qu'il y avait en amont de ce point l'instant auparavant. Ainsi, on peut remplacer l'algorithme (18.76) par un schéma *upwind*, c'est-à-dire prenant en compte la physique de la propagation, sous la forme :

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n - c\delta t \frac{\psi_i^n - \psi_{i-1}^n}{\delta x} \quad (18.79)$$

On vérifie alors facilement que :

$$\tau^2 = 1 - \frac{2c\delta t}{\delta x} [1 - \cos(k\delta x)] \left( 1 - \frac{c\delta t}{\delta x} \right) \quad (18.80)$$

ce qui montre que ce schéma est stable si  $c\delta t/\delta x < 1$ . Cette condition, appelée condition CFL (Courant, Friedrichs, Lewy), donne un maximum pour le pas de temps utilisé dans le schéma d'intégration. On la retrouvera dans tous les schémas explicites en temps<sup>11</sup>, mais son expression précise peut varier comme nous le verrons par la suite.

En comparant le schéma (18.79) au schéma centré (18.76), on pourra remarquer qu'ils diffèrent par un terme de dissipation faisant intervenir une dérivée seconde. En effet, on peut réécrire (18.79) sous la forme :

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n - c\delta t \frac{\psi_{i+1}^n - \psi_{i-1}^n}{2\delta x} + c\delta t \frac{\psi_{i+1}^n - 2\psi_i^n + \psi_{i-1}^n}{2\delta x} \quad (18.81)$$

où l'on reconnaîtra dans le membre de droite un terme de la forme  $c\delta x \partial_x^2 \psi$ . Ainsi, le schéma (18.79) est beaucoup plus dissipatif que le schéma centré d'origine, ce qui peut poser problème au niveau de la solution trouvée numériquement, qui se trouve être diffusée très rapidement. Remarquons que de manière générale, les schémas *upwind* diffèrent des schémas centrés par un terme de dissipation qui peut être d'ordre plus élevé et qui accroît naturellement la stabilité de ces schémas. Ainsi, cet exemple est souvent utilisé dans la littérature pour justifier l'utilisation de schémas *upwind* dans les méthodes numériques (voir par exemple Toro 1999). Cependant, nous allons voir que ces instabilités numériques ont en fait une origine différente.

<sup>11</sup>Un schéma explicite est un schéma dont la solution au temps  $n+1$  ne dépend que de la solution aux temps inférieures ou égaux à  $n$ .

### § 18.2. Stabilité des schémas temporels

Tout d'abord, imaginons une méthode de différenciation spatiale d'ordre infini (on peut par exemple imaginer une méthode spectrale dont l'ordre est très élevé). Cette méthode permet de calculer *exactement* la dérivée d'une fonction, pourvue que ses propriétés de continuités soient suffisantes (par exemple une fonction trigonométrique). Considérons alors le schéma d'intégration spatiale d'Euler décrit au paragraphe précédent avec cette méthode de différenciation spatiale. Une analyse de Von Neumann d'un tel schéma montre alors immédiatement que le taux de croissance :

$$\tau^2 = 1 + c^2 \delta t^2 k^2 \quad (18.82)$$

est toujours supérieur à 1, c'est-à-dire que cette méthode est à nouveau instable. Ceci montre que même avec une méthode de différenciation spatiale exacte, notre méthode d'intégration reste instable. Ceci pointe vers le fait que le problème de stabilité vient plus du schéma d'intégration *temporel* que du schéma spatial...

Pour étudier les schémas d'intégration temporels, et en particulier leur stabilité, je propose d'utiliser une approche graphique, originellement développée par Canuto *et al.* (1988) pour les méthodes spectrales, qui permet de comprendre les choix effectués dans cette thèse. Cette approche est basée sur une analyse de Von Neumann, que l'on va étendre pour l'intégration temporelle. Tout d'abord, en utilisant les fonctions de Von Neumann (18.77), ainsi qu'une formulation aux différences finies du type (17.70), on peut écrire :

$$\partial_x \psi_k^n = \frac{\psi_k^n}{\delta x} \left( \sum_{j=k-n}^{k+m} \alpha_j^{(1)} \exp[ik(j-k)\delta x] \right) \quad (18.83)$$

Ce que l'on réduira à l'expression générique :

$$\partial_x \psi_i^n = \psi_i^n \frac{f(k\delta x)}{\delta x} \quad (18.84)$$

où  $f$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , caractéristique de la formule de différences finies utilisée. En utilisant cette formulation, on remarque que l'équation différentielle d'advection (17.73) se réduit à :

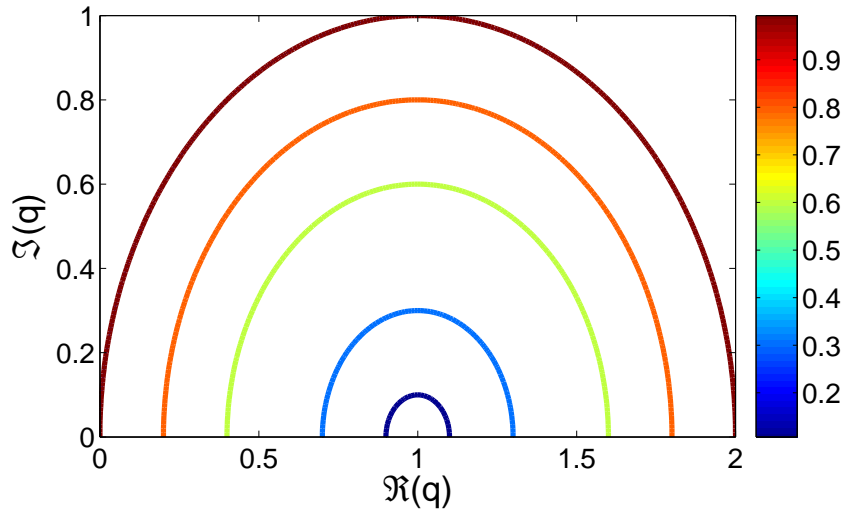
$$\partial_t \psi = -c \psi_i^n \frac{f(k\delta x)}{\delta x} \quad (18.85)$$

qui est donc une équation différentielle ordinaire. Aussi, pour la plupart des schémas d'intégration temporelles explicites (et en particulier ceux que je vais étudier dans la suite), on pourra écrire :

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n \left[ 1 - \mathcal{T} \left( \frac{c \delta t f(k\delta x)}{\delta x} \right) \right] \quad (18.86)$$

Cette forme de l'équation d'advection présente l'avantage de pouvoir séparer assez simplement le rôle de l'intégration temporel du schéma spatial. En effet, la stabilité du schéma sera vérifiée si  $|1 - \mathcal{T}(\dots)| < 1$ . Ainsi, on pourra supposer dans un premier temps que l'argument de  $\mathcal{T}$  prend toutes les valeurs possibles dans  $\mathbb{C}$ . On peut alors connaître les régions pour lesquelles le schéma temporel est stable. Il est ensuite facile de spécifier, pour un schéma différences finies, si la stabilité est possible ou pas.

Dans le cas du schéma d'intégration temporel d'Euler, la fonction  $\mathcal{T}$  est la fonction identité. On peut alors tracer un graphique représentant  $|1 - \mathcal{T}(q)|$  en fonction des parties réelles et imaginaires de l'argument  $q$  (Fig. 15). Ce graphique montre le comportement général du



**FIG. 15.** Tracé de  $|1 - \mathcal{T}(q)|$  pour un schéma temporel d'Euler en fonction des valeurs réelles et imaginaires de  $q$ . On voit clairement qu'un schéma différences finies symétrique [ $\Re(q) = 0$ ] ne peut pas être stable avec un tel schéma temporel.

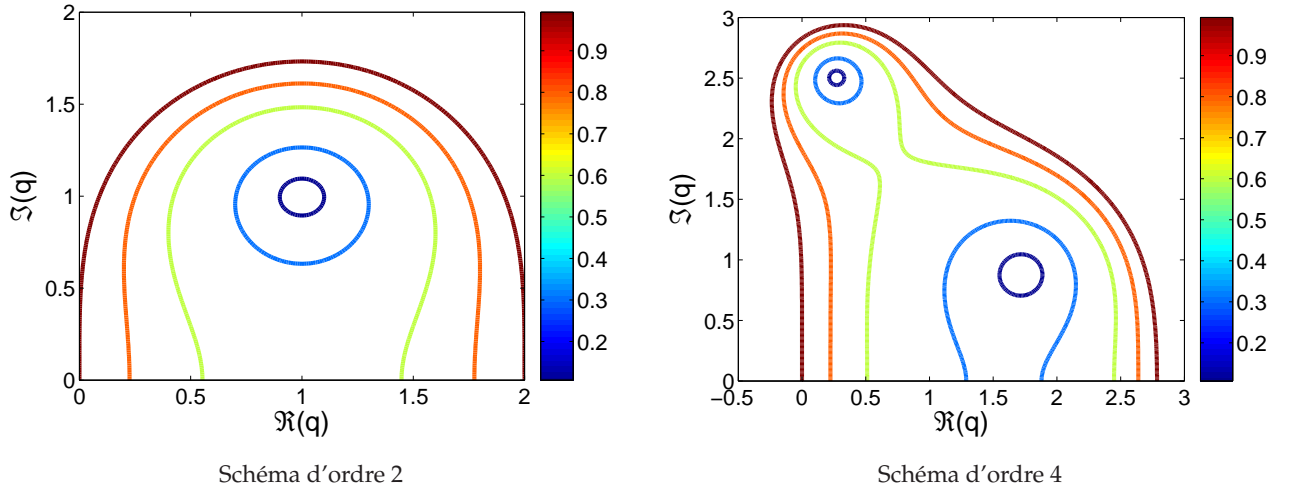
schéma temporel et permet de tirer quelques conclusions globales. On remarquera par exemple qu'un schéma différences finies centré ne pourra donner que des valeurs de  $f$  imaginaires pures [voir par exemple (18.78)], ce qui rendra nécessairement instable le schéma d'Euler. La même remarque s'applique lorsqu'on utilise une méthode exacte (ou spectrale) pour lesquelles  $f = ik$ . Ainsi, la nécessité d'utiliser un schéma upwind pour une équation d'advection découle seulement de l'utilisation d'un schéma d'Euler pour l'intégration temporelle, ce que nous allons pouvoir vérifier par la suite.

### § 19. Schémas de Runge-Kutta

On l'a vu précédemment, l'utilisation d'un schéma d'Euler impose l'utilisation de formules différences finies upwind d'ordre faible qui sont beaucoup plus dissipatives que des formules centrées ou des formules d'ordre élevé. Ainsi, il est souhaitable de trouver une méthode d'intégration, de préférence explicite en temps, qui soit stable, y compris pour les formules centrées. Un tel schéma peut être recherché parmi les schémas de Runge-Kutta, déjà testés pour le calcul de solutions d'équations différentielles ordinaires.

Nous nous proposons donc ici de tester les schémas de Runge-Kutta d'ordre 2 et 4, qui sont en pratique les plus utilisés. En utilisant les expressions algorithmiques de ces schémas (voir Annexe B), on peut se ramener à des expressions formelles, permettant d'obtenir un critère de stabilité générique. Pour se faire, on injecte l'équation différentielle ordinaire (18.85) dans un des algorithmes de Runge-Kutta. Cette équation étant très simple, on la résout formellement d'un pas d'intégration, ce qui nous permet finalement d'écrire la solution au pas de temps  $n + 1$  sous la forme (18.86). En pratique, on trouve :

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n \left( 1 - q + \frac{1}{2} q^2 \right) \quad (19.87)$$



**FIG. 16.** Tracé de  $|1 - \mathcal{T}(q)|$  pour 2 schémas temporels de Runge-Kutta en fonction des valeurs réelles et imaginaires de  $q$ . On montre ici qu'un schéma d'ordre 4 est stable pour des valeurs imaginaires pures de  $q$ , contrairement au schéma d'ordre 2.

pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2, en posant  $q = \frac{c\delta t}{\delta x} f(k\delta x)$ . De même, le schéma de Runge-Kutta donne naturellement :

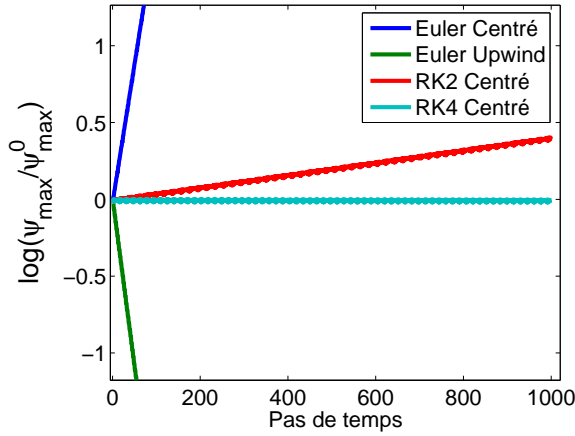
$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n \left( 1 - q + \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{6}q^3 + \frac{1}{24}q^4 \right) \quad (19.88)$$

A partir de ces expressions, il suffit de faire une analyse similaire à celle faite pour le schéma d'Euler pour connaître les propriétés de stabilité du schéma considéré (voir Fig. 16). Cette analyse montre de nouveau une instabilité systématique pour les schémas symétriques de l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2. Cependant, l'algorithme d'ordre 4 ne présente pas ce défaut. Dans le cas simple où l'on considère un schéma symétrique, c'est à dire  $q$  imaginaire pur, on montre facilement que ce schéma est stable si  $q < \sqrt{8}$ , ce qui constitue une condition CFL généralisée.

Pour résumer les résultats de cette partie, j'ai effectué des tests d'advection d'une fonction sinus sur 1000 pas de temps en utilisant les différents schémas temporels et spatiaux étudiés ici (voir Fig. 17). On y retrouve la très forte dissipation du schéma upwind (cette dissipation est toujours présente, quel que soit la méthode temporelle employée), et la forte instabilité des méthodes centrées combinées au schéma d'Euler. On observe aussi l'instabilité nettement plus faible du schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 et la stabilité du schéma d'ordre 4. Remarquons que ce dernier montre une dissipation extrêmement faible (une analyse attentive montre que  $\log(\psi_{max}^f / \psi_{max}^0) \simeq -6.10^{-3}$ ). La conclusion pourrait être qu'il faut utiliser le schéma centré avec la méthode Runge-Kutta d'ordre 4. Cependant, nous allons voir que cette combinaison présente certains désavantages, plus discrets que ceux étudiés jusqu'à présent, qui vont nous pousser vers l'utilisation de méthodes d'ordres plus élevés.

## § 20. Intérêt des formules d'ordre élevés

On pourra remarquer que les arguments pour l'utilisation d'une méthode plutôt qu'une autre étaient fondés sur l'amplitude de la solution (18.77). De cette amplitude découle la stabilité du



**FIG. 17.** Tracé du maximum de  $\psi$  en fonction du temps pour différents schémas d'advection. On voit clairement que les schémas centrés et upwind sont inexploitable avec la méthode d'Euler. L'instabilité du schéma Runge-Kutta d'ordre 2 reste très contenue et le schéma Runge-Kutta d'ordre 4 est stable.

schéma ainsi que sa dissipation intrinsèque. Cependant, l'advection de la solution est contrôlée par la *phase* de cette solution. On comprend alors que même si une méthode donne une solution d'amplitude *a priori* idéale, la physique de l'advection peut être très approximative, en raison de fortes erreurs de phase.

Cette remarque nous pousse à analyser plus en détail le problème de la phase pour les schémas utilisés jusqu'à présent. Pour simplifier, considérons que nous disposons désormais d'un schéma numérique temporel idéal (limite où  $\delta t \rightarrow 0$ ). Dans ce cas, en utilisant une solution du type (18.77) et une formulation différences finies de la forme (18.84), on peut écrire l'équation d'advection sous la forme :

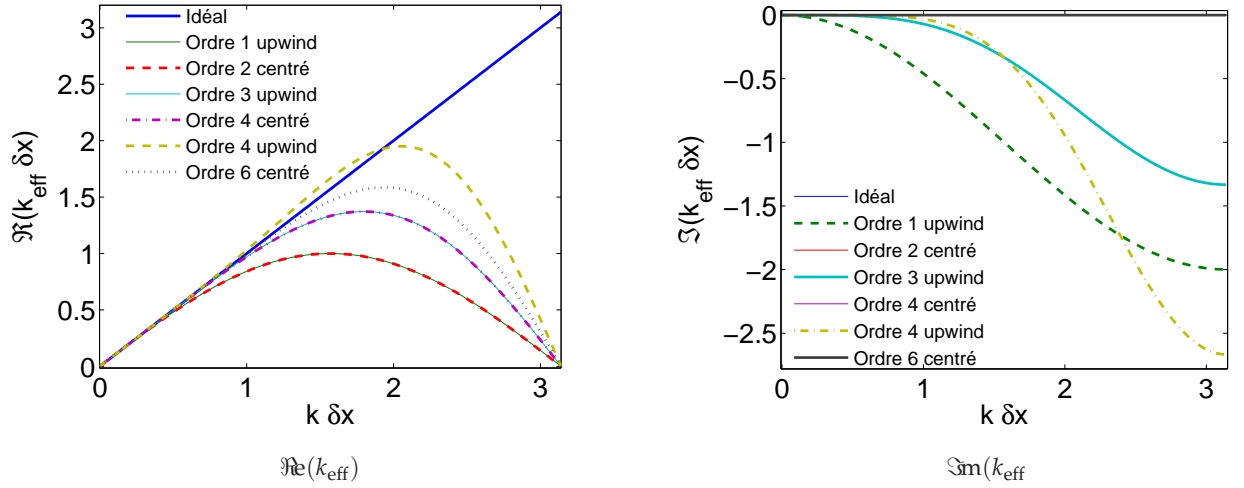
$$\partial_t \psi_j = -c \psi_j \frac{f(k\delta x)}{\delta x} \quad (20.89)$$

et la solution sera donnée de manière évidente par :

$$\psi_j(t) = \Gamma^0 \exp \left( -ct \frac{f(k\delta x)}{\delta x} + ikj\delta x \right) \quad (20.90)$$

On pourra alors noter formellement  $ik_{\text{eff}} = f(k\delta x)/\delta x$  ce qui permet de comparer cette solution à la solution formelle du problème (17.73), ce qui revient finalement à comparer les vecteurs d'onde des 2 solutions  $k_{\text{eff}}$  et  $k$ . La comparaison des parties réelles donne la vitesse d'advection effective alors que la comparaison des parties imaginaires donne le taux de dissipation numérique de la formule utilisée. Une telle analyse est faite des formules différences finies centrées et upwind à des ordres différents sur la figure (18).

Remarquons tout d'abord que les vitesses d'advection des méthodes centrées d'ordre  $n$  et des méthodes upwind d'ordre  $n - 1$  sont identiques. Ceci vient du fait que les méthodes upwind peuvent être vues comme des méthodes centrées auxquelles on rajoute un terme purement dissipatif, sous la forme d'un terme de différences finies représentant une puissance de  $\partial_x^2$ . Ainsi, toutes les méthodes upwind font apparaître une certaine dissipation ce qui explique leur stabilité comparativement aux schémas centrés. De plus, on remarque que l'on obtient des vitesses d'advection plus exactes avec des formules d'ordre élevé. En particulier, la formule d'ordre 4 upwind présente un très bon comportement sur ce point, malgré une diffusion importante aux grands nombres d'onde. Ceci montre que l'on aura intérêt, pour tenir compte des petites échelles, à prendre l'ordre de différentiation le plus élevé possible compatible avec les contraintes techniques. En effet, l'utilisation de ces méthode est coûteuse en temps de calcul, et diminue l'efficacité de la parallélisation, comme nous le verrons par la suite.



**FIG. 18.** Tracés de  $k_{\text{eff}}$  pour différentes formules différences finies. Notons que les schémas centrés ont systématiquement une partie imaginaire nulle. De même les schémas centrés d'ordre  $n$  et upwind d'ordre  $n - 1$  sont superposés sur le schéma  $\Re(k_{\text{eff}})$ .

## § 21. Advection d'une discontinuité

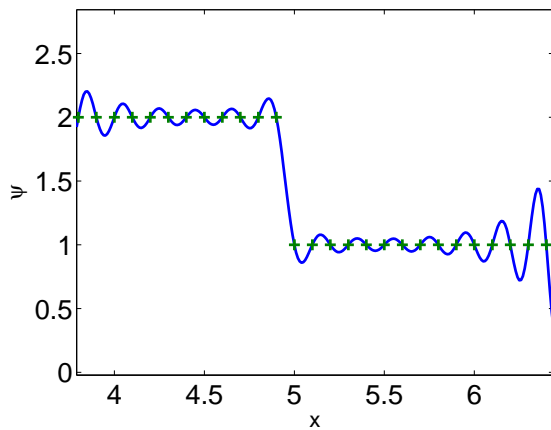
Jusqu'à présent, nous nous sommes contentés d'utiliser des fonctions tests simples et sans discontinuités telles que les fonctions trigonométriques. Cependant, un champ de vitesse réel peut présenter des discontinuités, même pour un écoulement largement subsonique. On pourra par exemple citer les discontinuité de cisaillement qui peuvent se former dans des écoulements turbulents. Ainsi, il est important de connaître et de tester le comportement d'un schéma face à l'advection d'une discontinuité.

Une des difficultés dans l'advection d'un signal discontinu vient du fait que les formules aux différences finies advectent naturellement des polynômes. Ainsi, une formule aux différences finies d'ordre 4 pourra advecter, en théorie sans erreur, un polynôme du même ordre. De manière générale, le calcul d'une dérivée en différences finies à l'ordre  $n - 1$  correspond au calcul de la dérivée du polynôme interpolateur d'ordre  $n$  passant par les points utilisés dans le schéma aux différences finies. On pourra ainsi écrire le polynôme interpolateur  $P_i$  sous la forme d'un polynôme de Lagrange :

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^n \psi_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Au voisinage d'une discontinuité, les polynômes interpolateurs ne convergent pas vers la fonction discontinue : c'est le phénomène de Gibbs (voir Fig. 19). Cette oscillation des polynômes interpolateurs se retrouve donc naturellement dans le calcul des dérivées en différences finies, ce qui engendre des oscillations parasites dans l'advection d'un choc.

Ainsi, on peut trouver sur la figure (20) le résultat de l'advection d'un choc par différentes formulations en différences finies. On remarque que toutes les méthodes, exceptée celle d'ordre 1, donnent lieu à la formation d'oscillations parasites. On peut aussi noter l'avantage des méthodes upwind qui dissipent naturellement ces oscillations au cours de l'advection,



**FIG. 19.** Interpolation d'une fonction constante par morceaux par des polynômes de Lagrange. Le phénomène d'oscillation apparaissant est nommé phénomène de Gibbs.

contrairement aux méthodes centrées. Enfin, il apparaît que les méthodes d'ordres élevés sont plus sensibles à ce phénomène que les autres.

On notera que l'existence d'oscillation dans le résultat est relié à la monotonie d'un schéma. En effet, considérons un schéma linéaire que l'on peut écrire sous la forme :

$$\psi_i^{n+1} = \sum_{j=i-k}^{i+m} \beta_j \psi_j^n. \quad (21.91)$$

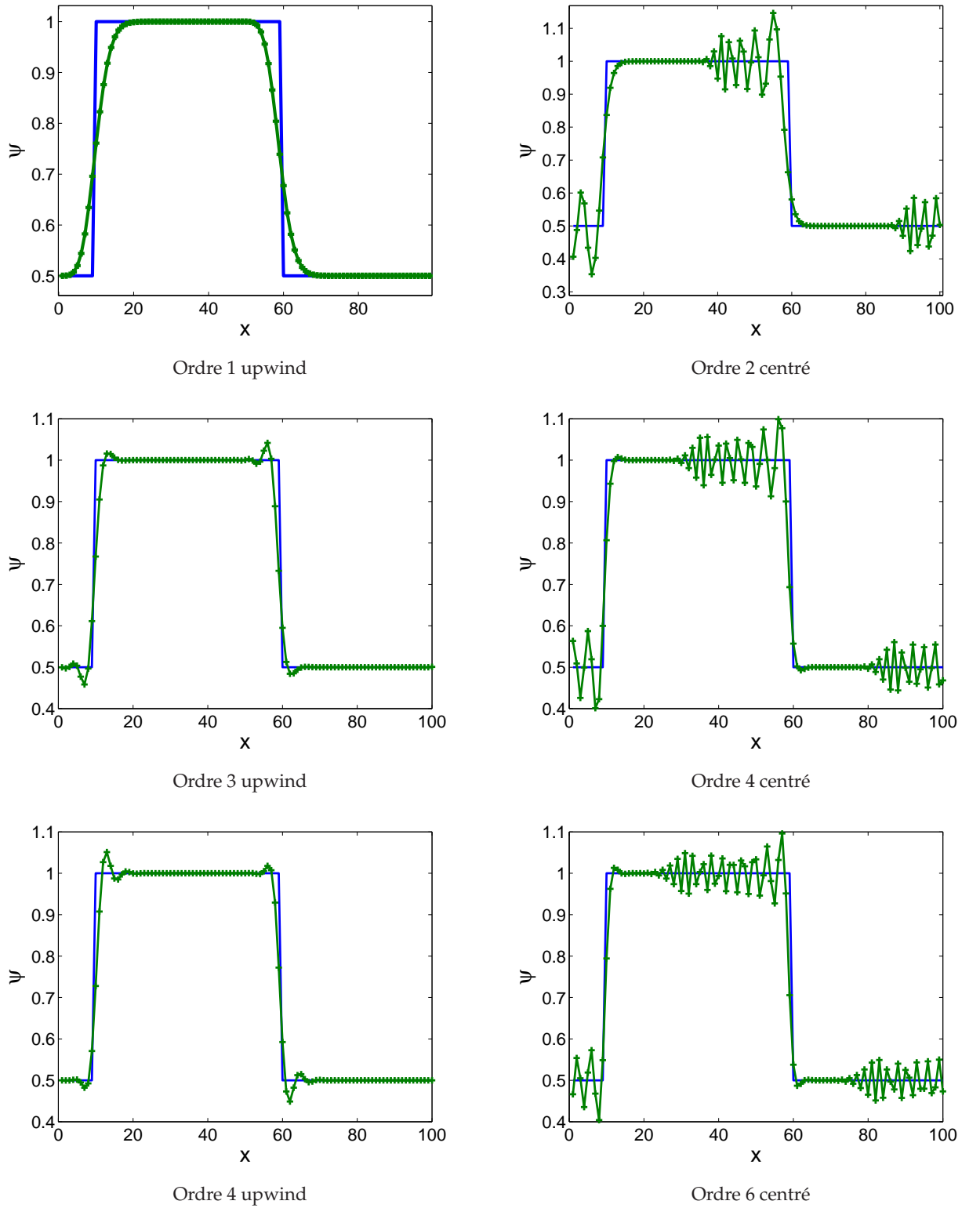
Ce schéma sera dit monotone si tous les coefficients  $\beta_j$  sont positifs. Un tel schéma présente l'avantage de ne pas créer de nouveaux extrema à chaque pas de temps (on montre en effet que si  $\psi^n$  est monotone, alors  $\psi^{n+1}$  l'est aussi). Ainsi, un schéma monotone permet de garantir qu'il ne créera pas d'oscillation parasite. On pourra ainsi remarquer que le schéma upwind avec une intégration d'Euler (18.79) est un schéma monotone. Malheureusement, d'après le théorème de Godunov, la formule de différences finies upwind d'ordre 1 est la seule méthode linéaire [c'est-à-dire de la forme (21.91)] qui donne un schéma monotone (voir par exemple Toro 1999 p. 444). Ceci montre que nous ne pourrions jamais éliminer complètement les oscillations dans les schémas d'ordre élevé.

Ainsi, une possibilité pour atténuer ces oscillations est l'utilisation de méthodes upwind d'ordre élevé comme on le voit sur la figure (20). Ces méthodes éliminent les oscillations formées par l'advection au voisinage du choc de manière assez efficace grâce à leur composante dissipative, et c'est cet argument qui nous poussera à choisir une méthode upwind plutôt qu'une méthode centrée dans la suite.

## § 22. Conclusions

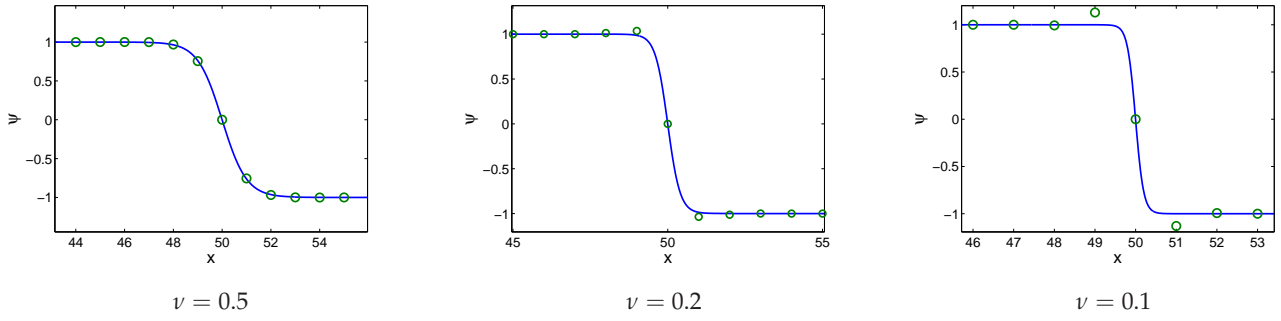
Nous avons vu dans cette section quelques principes fondamentaux sur le problème de l'advection dans les codes numériques. En particulier, on a montré par des considérations de stabilité qu'il était préférable d'utiliser une méthode d'intégration temporelle d'ordre élevé (Runge Kutta d'ordre 4). De plus, les formules spatiales d'ordre élevé nous permettent d'obtenir des vitesses d'advection plus précises que les formules classiques. Enfin, on éliminera les oscillations parasites apparaissant au voisinage des zones de discontinuité en utilisant des formules spatiales upwind, qui intègrent naturellement une forme de dissipation numérique.





**FIG. 20.** Tests d'advection d'un créneau avec différentes formulations différences finies et une intégration temporelle de Runge-Kutta à l'ordre 4 (20 pas de temps avec  $\Delta t = 0.5$  et  $c = 1$ ). On remarque que les méthodes upwind permettent de réduire de manière significative les oscillations, même à des ordres élevés.





**FIG. 21.** Test d'un algorithme utilisant une intégration temporelle de Runge Kutta d'ordre 4 et des dérivées spatiales aux différences finies upwind d'ordre 4 sur l'équation de Burgers. L'intégration a été effectuée sur 50 pas de temps pour  $U_0 \Delta t / \Delta x = 0,5$ .

Compte tenu de ces résultats, nous utiliserons dans la suite une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 combinée avec la formule différence finie upwind d'ordre 4.

### 3. Transport non linéaire

#### § 23. L'équation de Burgers

Jusqu'à présent, l'équation étudiée était linéaire et les solutions étaient trouvées facilement de manière analytique. Malheureusement, les équations de la physique font couramment intervenir des termes non linéaires, sources de nombreux problèmes. Ainsi, toutes les équations fluides font intervenir un terme de transport non linéaire. C'est le cas par exemple du champ de vitesse qui est transporté par lui même. Ce type de terme peut engendrer des phénomènes très violents comme des chocs et excite naturellement toute la gamme des fréquences spatiales disponibles : une analyse en harmoniques telle que celle utilisée jusqu'à présent ne nous sera donc d'aucun secours.

Pour étudier les interactions non linéaires d'un point de vue numérique, on peut utiliser une équation modèle mettant en jeu les principales caractéristiques de la physique que l'on veut étudier : c'est l'équation de Burgers, que l'on écrira sous la forme :

$$\partial_t u = -u \partial_x u + \nu \partial_x^2 u \quad (23.92)$$

On peut y reconnaître un terme de transport et un terme dissipation, comparables à une équation de Navier-Stokes à une dimension. On peut vérifier que :

$$\psi(x) = U_0 \tanh\left(\frac{U_0 x}{2\nu}\right) \quad (23.93)$$

est une solution stationnaire de cette équation. De plus, elle peut être vue comme un choc d'épaisseur  $2\nu/U_0$ , ce qui permet de tester le comportement non linéaire d'un code face à un gradient très fort.

Ainsi, nous avons testé le comportement de notre algorithme d'intégration sur l'équation de Burgers pour différentes valeurs de  $\nu$ . Les résultats sont regroupés sur la figure (21). On voit que le comportement du code face à de forts gradients reste correct, même pour des viscosités faibles ( $\nu = 0,1$ ). Notons cependant l'apparition d'une oscillation parasite dans les cas où la

taille typique du gradient est en dessous de la taille de grille : c'est la signature de l'utilisation d'une méthode non monotone.

## 4. Implémentation d'un code hydrodynamique aux différences finies

### § 24. Équations

Je vais développer succinctement dans cette section l'implémentation en différences finies de l'un des codes que j'ai développé et utilisé dans ce travail de thèse. Pour se faire, commençons par développer les équations de la mécanique des fluides telles qu'elles sont résolues par le code.

$$\begin{aligned}\frac{D \ln(\rho)}{Dt} &= -\nabla \cdot \mathbf{v} \\ \frac{D \mathbf{v}}{Dt} &= -\frac{\nabla P}{\rho} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}} \\ \frac{D \ln(P)}{Dt} &= -\gamma \nabla \cdot \mathbf{v} + \left[ \frac{(\gamma - 1)}{P} \boldsymbol{\mathcal{T}} \cdot \nabla \mathbf{v} \right]\end{aligned}$$

Ce système d'équations appelle à plusieurs remarques. Tout d'abord, notons que l'on préfère faire évoluer les logarithmes des quantités scalaires plutôt que leurs valeurs réelles. Cela présente plusieurs avantages. En effet, une telle méthode garantit que  $\rho$  et  $P$  sont positifs. De plus, des simulations faisant intervenir une large amplitude en densité et en pression (cas d'un disque et sa couronne par exemple) seront traitées avec plus de précision.

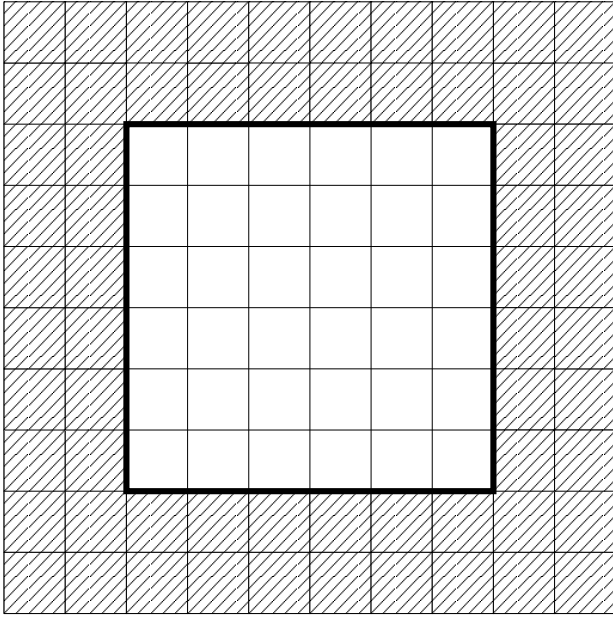
D'autre part, je fais appel dans ce code à une dissipation physique sous la forme du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ , décrit en introduction (Eq. 6.24, p. 17). Dans l'équation d'énergie, on introduit donc en plus de l'évolution isentropique classique, un terme de chauffage (terme entre crochets). Cependant, pour les raisons explicitées en introduction, on négligera systématiquement ce terme de chauffage, excepté dans le cas du test de choc, où l'évolution entropique a une importance particulière (Fig. 25).

J'ai de plus introduit la force de Coriolis dans son expression générale. Dans les faits, l'axe de rotation sera systématiquement sur l'axe  $z$ , ce qui simplifiera l'expression de cette dernière. Enfin, j'utilise un coefficient adiabatique  $\gamma = c_p/c_v$  dans l'équation d'énergie, ce qui suppose une équation d'état de type gaz parfait. On utilisera systématiquement  $\gamma = 5/3$ , sauf précision contraire. On pourra dans certains cas simplifier le système en supposant que le fluide est isotherme, on posera alors  $P \propto \rho$  et on ne résoudra que l'équation de conservation de la masse.

### § 25. Conditions aux limites

Jusqu'à présent, je n'ai pas discuter des conditions aux limites. Elles font cependant partie intégrante du problème différentiel et ne doivent pas être négligées. Je vais donc présenter ici un aperçu des conditions aux limites utilisées dans mes simulations.

Tout d'abord, rappelons que les formules différences finies ne sont pas locales au sens où on l'entend en physique. En effet, un calcul de dérivée nécessite de connaître la valeur de la fonction aux points voisins du point de calcul. En pratique, sur une grille donnée, le calcul



**FIG. 22.** Principe des zones fantômes pour traiter les conditions aux limites. L'espace physique sur lequel les équations sont effectivement résolues est délimité en gras, et les zones fantômes sont hachurées. On a représenté ici une grille avec 2 zones fantômes, bien que ce nombre puisse varier suivant l'ordre des formules différences finies utilisées.

des dérivées en bordure de grille fait appel à des points qui sont *a priori* en dehors de la grille. Pour résoudre ce problème, on fait donc appel à une série de zones fantômes ou *ghost zones*, qui sont réparties autour de la grille de calcul (voir Fig. 22). Ces zones fantômes sont initialisées manuellement à chaque pas de temps, et jouent donc le rôle des conditions aux limites que l'on rencontre en physique. Le nombre de zones à avoir au voisinage d'un point dépend directement de la formule aux différences finies utilisée, et sera à traiter au cas par cas. En pratique, plus l'ordre de la formule est élevé, plus le nombre de zones fantômes devra être important.

Je n'utiliserai que deux types de conditions aux limites, les conditions aux limites rigides, ainsi que les conditions aux limites shearing sheet, qui sont un type particulier de conditions aux limites périodiques. Je vais donc décrire ici les méthodes d'initialisation numériques pour ces deux types de conditions aux limites.

### § 25.1. Conditions aux limites rigides

Dans le cas des conditions aux limites rigides, on considérera que le fluide est « collé » à la paroi, c'est-à-dire que la vitesse parallèle au mur est égale à celle du mur. Ainsi, dans les zones fantômes, on imposera :

$$v^{\parallel} = v_{\text{mur}} \quad (25.94)$$

Cependant, lorsque les murs imposent un cisaillement linéaire au fluide, on ne pourra pas utiliser cette relation. En effet, en théorie, un cisaillement linéaire annule le terme de viscosité de l'équation de Navier-Stokes. Cependant, si on utilise la prescription proposée ci-dessus, on induit une cassure du profil linéaire dans les zones fantômes, ce qui induit une légère dissipation au voisinage des murs. Dans ce cas, on choisira donc d'imposer le profil linéaire attendu dans les zones fantômes. On écrira donc dans ces dernières :

$$v_i^{\parallel} = S y_i \quad (25.95)$$

où  $S$  est le cisaillement de l'écoulement laminaire, et  $y_i$  est la position spatiale de la zone fantôme dans la direction du cisaillement.

Pour la vitesse perpendiculaire à l'écoulement, on utilisera des conditions de réflexion sur le mur, de la même manière que Stone & Norman (1992). En supposant que  $i \geq 0$  délimite les zones actives de la grille et  $i < 0$  les zones fantômes, on écrira pour  $i > 0$  :

$$v_{-i}^{\perp} = -v_i^{\perp} \quad (25.96)$$

De même, la condition de réflexion sur les murs se traduit pour la pression et la densité par :

$$\rho_{-i} = \rho_i \quad (25.97)$$

$$P_{-i} = P_i \quad (25.98)$$

### § 25.2. Conditions aux limites shearing sheet

Les conditions aux limites shearing sheet sont une classe particulière de conditions aux limites périodiques, où l'on tient compte du cisaillement moyen du fluide. Rappelons que les conditions aux limites périodiques s'écrivent très simplement sur une grille numérique. Dans le principe, on recopie un bord de la zone active dans les zones fantômes du bord opposé. Ainsi, si on suppose que la grille s'étend des indices 0 à  $n - 1$ , on écrira pour les zones fantômes à gauche de la zone active :

$$\psi_{-i} = \psi_{n-i} \quad (25.99)$$

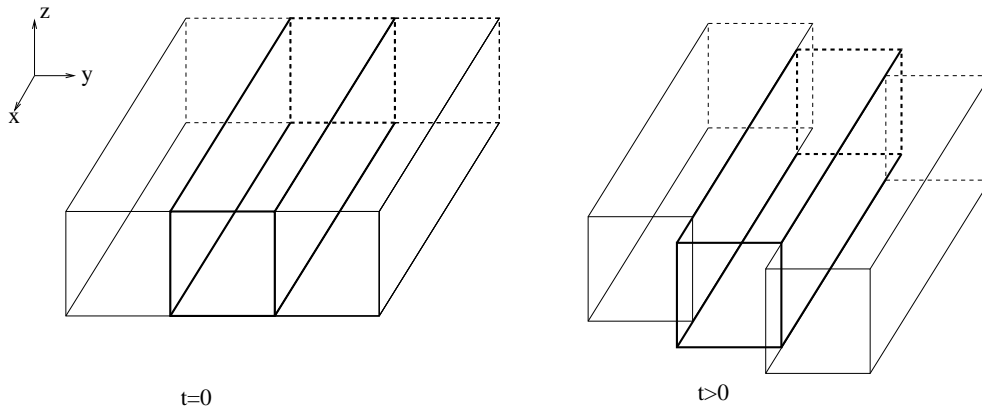
avec  $i > 0$ . On aura de la même manière à droite de la zone active :

$$\psi_{i+n-1} = \psi_{i-1} \quad (25.100)$$

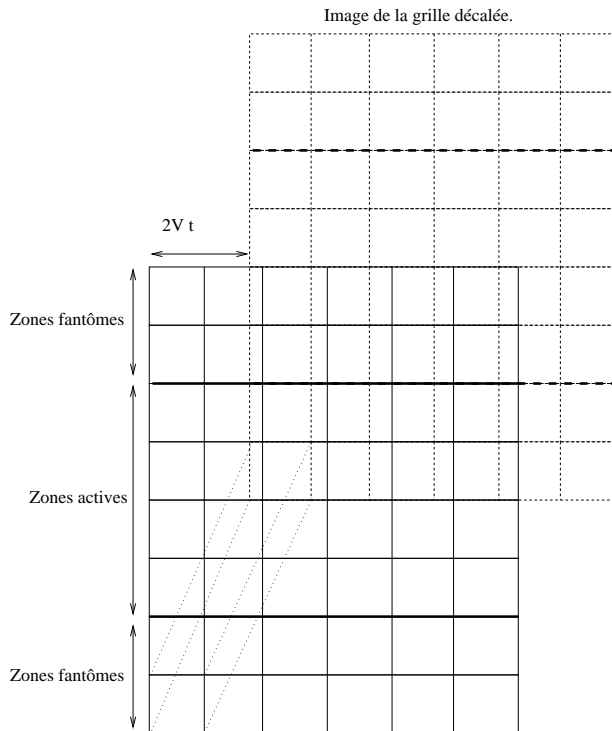
avec là aussi  $i > 0$ .

Lorsque l'écoulement est cisailé, on ne peut pas appliquer directement les conditions aux limites périodiques dans la direction du cisaillement. En effet, ces dernières ne tiennent pas compte de l'advection par le cisaillement moyen. On peut alors utiliser des murs dans cette direction : c'est l'écoulement de Couette plan. Cependant, dans un vrai disque d'accrétion, les particules fluides sont libres de se déplacer dans la direction radiale. Il faut donc trouver des conditions aux limites qui autorisent à l'écoulement de sortir ou d'entrer radialement : ce sont les conditions *shearing sheet*. Ces conditions sont très similaires à des conditions aux limites périodiques, mais tiennent compte de l'advection due au cisaillement. Elles ont été développées initialement par Goldreich & Lynden-Bell (1965) pour l'étude locale des ondes spirales galactiques. Elles ont ensuite été utilisées numériquement par Hawley *et al.* (1995) qui les ont appliquées aux disques.

Le principe de ces conditions aux limites est assez simple : de la même manière que pour des conditions aux limites périodiques, on recopie la boîte de simulation de chaque côté de celle ci, dans la direction du cisaillement. Cependant, on tient compte du cisaillement moyen en décalant les boîtes recopiées (Fig. 23). Il convient alors de remarquer que ce décalage induit une nouvelle erreur numérique. En effet, les valeurs des zones fantômes dépendent de deux points de la zone active (voir Fig. 24). Il faut donc effectuer une interpolation des points de la zone active pour pouvoir initialiser correctement les zones fantômes. En pratique, il conviendra d'utiliser une méthode d'interpolation d'ordre au moins égale à l'ordre spatial du code utilisé, sous peine d'introduire de nouvelles erreurs d'arrondis. De plus, pour les mêmes raisons que l'équation linéaire d'advection, il conviendra d'utiliser une méthode d'interpolation donnant naissance au minimum d'oscillations possible (l'idéal étant une interpolation monotone).



**FIG. 23.** Principe des conditions aux limites shearing sheet : la boîte de simulation est recopiée de part et d'autre de la boîte calculée (en gras), en prenant en compte un décalage dû au cisaillement moyen.

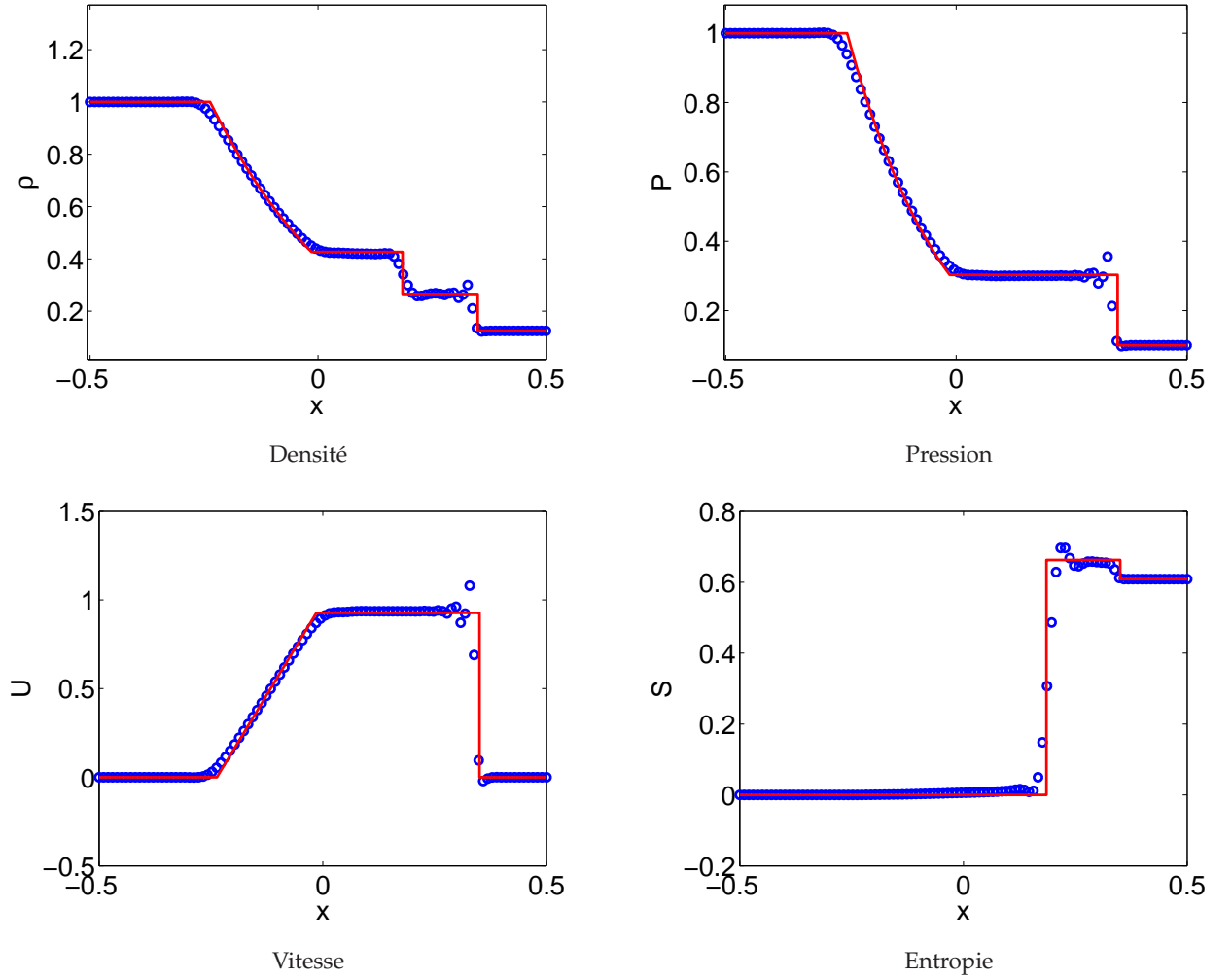


**FIG. 24.** Exemple de mise en œuvre des conditions aux limites shearing sheet avec un code utilisant 2 zones fantômes. On voit que la zone fantôme en bas à gauche doit être mise à jour à l'aide d'une interpolation entre 2 zones actives (en pointillé).

## § 26. Tests

Les tests pouvant être effectués sur ce type de code sont nombreux (voir par exemple Stone & Norman 1992). A titre d'exemple, je montrerai ici le résultat du test du tube de choc unidimensionnel (Sod 1978), couramment utilisé pour discriminer les méthodes aux volumes finis. Ce test permet d'obtenir le comportement d'un code vis-à-vis de différentes ondes de choc rencontrées dans le problème de Riemann. Il est certain que mon objectif n'étant pas de traiter des chocs, mes résultats ne pourront pas concurrencer les codes Godunov adaptés à ce type de physique. Les résultats de ces tests sont donc fournis à titre purement indicatif sur la figure (25).

On remarquera une fois de plus l'apparition d'oscillations dues à la méthode spatiale d'ordre élevé. Cependant, l'essentiel de la physique contenue dans ces chocs reste correct. En particulier l'onde de choc (première discontinuité sur la droite) avance à la vitesse prévue et le saut



**FIG. 25.** Test du tube de choc pour  $\gamma = 1.4$  et 100 points de grille à  $t = 0.2$ . La limite entre les deux milieux est fixée initialement en  $x = 0$ . On a choisi comme conditions initiales  $\rho = 1$ ,  $P = 1$  à gauche et  $\rho = 0.125$ ,  $P = 0.1$  à droite.

d'entropie en aval du choc correspond à la théorie. Notons que cet effet est obtenu grâce à l'utilisation d'une viscosité physique faible mais non nulle ( $\nu = 10^{-3}$ ) dans la simulation, qui engendre naturellement un chauffage.

## 5. Magnétohydrodynamique

### § 27. Le problème de la divergence de $B$

La plupart des gaz astrophysiques sont ionisés, comme on l'a vu dans la première partie. Ainsi, la plupart des simulations effectuées en astrophysique font intervenir un couplage entre la matière et le champ magnétique sous la forme des équations de la MHD. Une des plus grandes difficultés dans ces simulations vient de la condition sur le champ magnétique :

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (27.101)$$

Cette condition peut être satisfaite *a priori* sur les conditions initiales. De plus, l'équation de Faraday pour l'évolution du champ magnétique devrait conserver la divergence de  $B$ . Ceci n'est

pas vrai numériquement et les erreurs de troncature engendrent une croissance progressive de la divergence, ce qui forme des « monopoles » magnétiques, sources de nombreux problèmes numériques. De nombreuses méthodes ont été développées depuis les années 1980 pour contrôler ce type de phénomène. Citons par exemple le transport contraint (Evans & Hawley 1988) qui a rencontré un grand succès avec le code Zeus. Cependant, cette méthode est peu adaptée aux schémas d'ordre élevé, et j'ai préféré utiliser une méthode basée sur le potentiel vecteur.

En effet, on peut remarquer que l'on peut écrire l'équation de Faraday en fonction d'un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \nu_m \Delta \mathbf{A} \quad (27.102)$$

en imposant la condition  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Ainsi, en faisant évoluer  $\mathbf{A}$  plutôt que  $\mathbf{B}$ , on évite le problème de la divergence de  $\mathbf{B}$ , qui est maintenue naturellement au niveau de précision de la machine. Cependant, on remarquera que  $\mathbf{A}$  n'est pas unique : il dépend d'un choix de jauge tel que :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \quad (27.103)$$

où  $f$  est une fonction quelconque. Ce choix de jauge doit être cohérent avec la physique du problème, sans quoi des instabilités numériques peuvent apparaître, comme je vais le montrer par la suite.

## § 28. Choix de Jauge

En réécrivant l'équation (27.102) en composantes avec  $\nu_m = 0$ , il vient naturellement :

$$\partial_t A_i + v_j \partial_j A_i = v_j \partial_i A_j \quad (28.104)$$

On y retrouve un terme de transport et un terme mixte qui correspond à l'élongation des tubes de champ. Cependant, cette équation montre clairement que chaque composante est transportée *uniquement* dans les directions qui lui sont transverses. Ceci pose problème dans un disque d'accrétion. En effet, un disque est un fluide en rotation différentielle : quel que soit le référentiel que l'on choisira, il y aura toujours du fluide en mouvement dans la direction azimutale. En utilisant l'équation (28.104), la composante azimutale du potentiel vecteur ne sera pas transportée avec le fluide ! Ceci posera de graves problèmes si l'on utilise des conditions aux limites locales du type shearing sheet, qui supposent que toutes les quantités sont transportées par l'écoulement cisaillé. Il convient donc de trouver un choix de jauge plus adéquat à ce problème. Pour se faire, on peut remarquer que :

$$v_j \partial_i A_j = \partial_i v_j A_j - A_j \partial_i v_j \quad (28.105)$$

Ce qui permet de réécrire (28.104) en suivant Brandenburg *et al.* (1995) avec la nouvelle jauge  $f = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$  :

$$\partial_t A'_i + v_j \partial_j A'_i = -A'_j \partial_i v_j \quad (28.106)$$

qui inclut cette fois ci un terme de transport dans toutes les directions pour chaque composante de  $\mathbf{A}$ .

Il se trouve qu'une telle formulation implémentée en différences finies ne marche pas. En effet, l'équation (28.105), bien que valide analytiquement, n'est pas vérifiée numériquement (on



pourra facilement s'en convaincre en utilisant les formules centrées d'ordre 2). Numériquement, un changement de jauge introduit donc des termes non physiques dont le contrôle est très hasardeux. Une simple simulation d'une onde d'Alfvén avec la jauge (28.106) conduit à une explosion du code extrêmement rapidement. Il faut donc garder au maximum la physique de la MHD dans la jauge que l'on utilise. Pour se faire, on peut décomposer l'écoulement en une composante laminaire et une composante perturbative (on ne suppose pas la perturbation petite). On écrira donc pour le champ de vitesse :

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u} \quad (28.107)$$

où  $\mathbf{V}$  est l'écoulement laminaire. Je propose alors d'utiliser la jauge (28.106) pour l'écoulement laminaire et la jauge (28.104) pour les perturbations, ce que l'on écrira

$$\partial_t A_i + V_j \partial_j A_i = -A_j \partial_i V_j + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_i \quad (28.108)$$

Ce type de formulation permet d'introduire un transport du potentiel vecteur par l'écoulement laminaire cohérent avec les autres champs, tout en calculant de manière aussi précise que possible la physique de l'interaction entre les perturbations et le champ magnétique. De plus les tests que j'ai effectué sur cette formulation ont montré une stabilité bien meilleure que la simple formulation (28.106).

## 6. Parallélisation

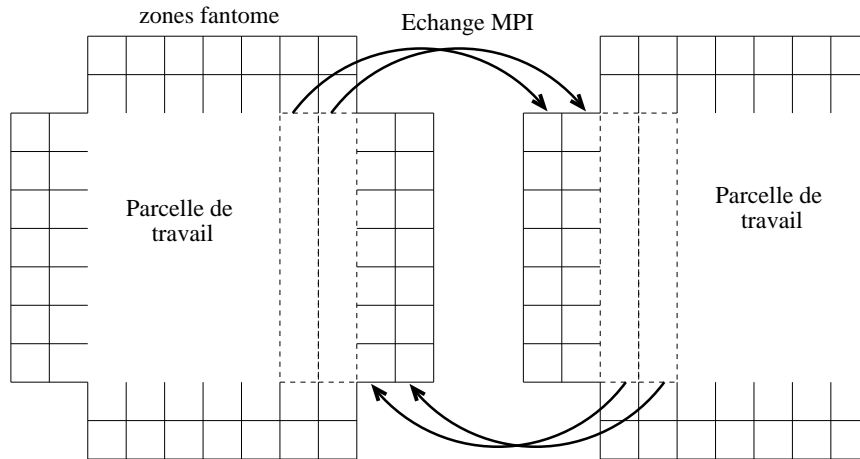
### § 29. Choix d'une méthode de parallélisation

L'emploi de plusieurs processeurs en parallèle est aujourd'hui nécessaire si l'on souhaite obtenir les résultats de simulations en des temps raisonnables. On fait alors appel à des méthodes de parallélisation qui dépendent de la nature du code, mais aussi de l'architecture des machines à notre disposition. Globalement, il existe 2 principes de parallélisation :

**Méthodes à mémoire partagée:** Dans ces méthodes, chaque processeur a accès à la totalité de la mémoire. On peut alors faire exécuter chaque boucle séparément par chaque processeur, lesquels stockeront leur résultat dans la mémoire centrale. C'est la méthode de parallélisation la plus simple mais aussi la moins efficace : elle devient inintéressante au delà de 8 processeurs. De plus, elle nécessite une architecture à mémoire partagée assez coûteuse. Le protocole *OpenMP* est l'implémentation la plus connue de méthode de parallélisation à mémoire partagée.

**Méthodes à mémoire distribuée:** Ces méthodes supposent que chaque processeur constitue une machine indépendante avec sa mémoire propre. On doit alors séparer le code en différents morceaux indépendants qui peuvent être résolus séparément. Chacun des processeurs doit évidemment communiquer une partie de ses résultats aux autres : c'est la méthode de parallélisation par messages. Cette méthode, bien que nécessitant des modifications plus profondes dans la construction d'un code, est aussi la plus efficace (des parallélisations sur plusieurs milliers de processeurs ont été effectués avec succès). Remarquons de plus que ce type de méthode peut être utilisé aussi avec des machines à mémoire partagée. L'implémentation la plus connue de ce type de méthode est le protocole *MPI* (Message Passing Interface).





**FIG. 26.** Principe de la décomposition de domaine : à chaque pas de temps, les zones fantômes sont mises à jour à partir des informations aux frontières des parcelles voisines.

Des premiers tests ont été effectués en parallélisant notre code avec une méthode *OpenMP*. Il est alors apparu rapidement que les gains en vitesse d'exécution étaient trop faibles pour pouvoir répondre aux questions posées dans le temps imparti pour ce travail de thèse. J'ai donc décidé d'utiliser une parallélisation MPI basée sur la décomposition de domaine.

### § 30. Décomposition de domaine

La méthode de décomposition de domaine consiste à décomposer l'espace physique discrétisé en parcelles identiques. La résolution des équations sur chacune des parcelles est alors dévolue à un processeur. De la même manière que pour les conditions aux limites, les versions numériques des équations de la dynamique ne sont pas rigoureusement locales, et la résolution des équations dans une parcelle fait *nécessairement* intervenir des points situés dans d'autres parcelles : c'est là qu'intervient le protocole d'échange de messages.

Ainsi, on définit une série de zones fantômes entourant chaque parcelle. Ces zones fantômes sont l'image des frontières des parcelles voisines<sup>12</sup> et ne sont qu'un support permettant la résolution de l'équation différentielle à l'intérieur d'une parcelle. A chaque pas de temps, les données des zones fantômes sont mises à jour en récupérant le résultat de l'évolution de chaque parcelle voisine (voir Fig. 26).

On comprend alors facilement que le nombre de zones fantômes à échanger est proportionnel à l'ordre de la méthode différences finies utilisée dans la résolution de l'équation d'évolution. Ainsi, pour la méthode upwind d'ordre 4 que nous utilisons, on a besoin de connaître jusqu'à trois points en amont du point de calcul, on utilisera donc 3 zones fantômes dans chaque direction.

Ce point montre que l'on ne peut pas utiliser des méthodes aux différences finies d'ordre très élevé tout en utilisant une parallélisation de type *MPI*. En effet, ces méthodes requièrent

<sup>12</sup>Sauf pour les parcelles situées sur les limites du domaine de résolution, où les zones fantômes sont initialisées à partir des conditions aux limites.

---

l'échange d'un grand volume de données, ce qui est très pénalisant pour la vitesse finale d'exécution d'un code.



# 5

## Méthodes spectrales

### Plan du chapitre

1. Fondements.....	59
§ 31. Présentation générale des méthodes spectrales.....	60
§ 32. Base de Fourier.....	60
§ 32.1. Définition.....	60
§ 32.2. Comparaison entre méthode de Galerkin et méthode de collocation.....	61
2. L'équation d'advection.....	62
§ 33. Stabilité et condition CFL.....	62
§ 34. Test d'advection.....	62
3. Non linéarités et méthodes spectrales.....	63
§ 35. Méthodes pseudo-spectrales.....	63
§ 36. Repliement spectral et dealiasing.....	64
4. Traitement du cisaillement.....	66
§ 37. Système de coordonnées cisillées.....	66
§ 38. Procédure de remappage.....	67
§ 38.3. Pertinence physique des ondes cisillées.....	67
§ 38.4. Description du remappage.....	69

### 1. Fondements

**L**ES MÉTHODES SPECTRALES ont commencé à être utilisées lors de l'apparition des premiers algorithmes de transformée de Fourier rapide (Cooley & Turkey 1965). On notera cependant que l'algorithme avait déjà été décrit au XIX<sup>e</sup> siècle (Gauss 1866). Depuis, elles ont souvent été utilisées dans les problèmes de turbulence homogène isotrope (Orszag & Patterson 1972) car elles permettent d'obtenir une vitesse de convergence très élevée et donc une excellente résolution des petites échelles. Je ne présenterai ici que les caractéristiques générales des méthodes spectrales, ainsi que les algorithmes que j'ai spécifiquement développés pour la problématique des disques. On pourra trouver une documentation complète sur ces méthodes appliquées à la mécanique des fluides dans Canuto *et al.* (1988) et Peyret (2002) dans le cas incompressible.

### § 31. Présentation générale des méthodes spectrales

Le principe de base des méthodes spectrales est de décomposer la solution  $u$  d'une équation différentielle sur une base (infinie) de fonctions orthogonales :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k \phi_k(x) \quad (31.109)$$

où les fonctions  $\phi_k$  sont une base orthogonale de l'espace des fonctions sur  $(x_0, x_1)$  munies d'un produit scalaire, c'est-à-dire :

$$(\phi_k, \phi_l) = \int_{x_0}^{x_1} \phi_k(x) \phi_l^*(x) w(x) dx = \delta_{kl} \quad (31.110)$$

où  $w$  est la fonction de poids associée au produit scalaire. On peut alors vérifier aisément que les  $\tilde{u}_k$  s'obtiennent par projection de  $u$  sur la base :

$$\tilde{u}_k = \int_{x_0}^{x_1} u(x) \phi_k^*(x) w(x) dx \quad (31.111)$$

La discrétisation numérique consiste alors à tronquer la base des  $\phi_k$  de sorte que l'on écrive la solution sous la forme :

$$u_d(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \phi_k(x) \quad (31.112)$$

où on notera que les coefficients  $\hat{u}_k$  sont *a priori* différents de ceux de la décomposition exacte (31.109). On peut alors obtenir 2 types d'approximation  $u_d$  de la solution exacte  $u$ .

**Méthode de Galerkin:** Dans cette méthode, on cherche à obtenir la projection exacte de  $u$  sur la base tronquée, c'est à dire  $\hat{u}_k = \tilde{u}_k$  pour  $k \in [0, N]$ . Cette méthode présente l'avantage de fournir comme solution une fonction de l'espace réel, qui peut donc être calculée sur une grille spatiale aussi fine que voulue.

**Méthode de collocation:** Cette méthode se base sur une approche similaire aux méthodes de différences finies : on se fixe une famille de points dans l'espace  $x_k$ ,  $k = 0 \dots N$  et on impose  $u_d(x_k) = u(x_k)$ . Ces points sont alors appelés points de collocation. Cette approche permet une utilisation intuitive et assez simple des bases spectrales comme nous le verrons dans la suite.

Ces deux méthodes ne sont pas rigoureusement identiques et ne donneront donc pas les mêmes résultats. Le choix de l'une ou l'autre dépendra de l'équation à traiter mais aussi de la nature de la base utilisée. Dans la suite, nous utiliserons les bases de Fourier pour illustrer les différences et expliquer les choix qui ont été fait dans ce travail de thèse.

### § 32. Base de Fourier

#### § 32.1. Définition

La base de Fourier est un ensemble de fonctions trigonométriques, périodiques sur  $[0, 1]$ , que l'on peut l'écrire sous la forme :

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i2\pi kx) \quad (32.113)$$

Cette base est très utile lorsque les solutions d'une équation sont recherchées avec des conditions aux limites périodiques. Étant donné la décomposition (31.112), cette condition de périodicité

est automatiquement satisfaite *sans contrainte supplémentaire*. On pourra vérifier aisément que la relation d'orthogonalité (31.110) est respectée par la base de Fourier avec une fonction de poids  $w = 1$ .

### § 32.2. Comparaison entre méthode de Galerkin et méthode de collocation

On l'a vu, les coefficients  $\hat{u}_k^G$  de la méthode de Galerkin sont directement donnés par :

$$\hat{u}_k^G = \tilde{u}_k = \int_0^1 u(x) \exp(-i2\pi kx) dx \quad (32.114)$$

Par ailleurs, définissons une série de points de collocation  $x_j$  tels que :

$$x_j = \frac{j}{N} \quad (32.115)$$

On peut alors écrire en chacun de ces points, en utilisant la méthode de collocation :

$$u_d(x_j) = u(x_j) \quad (32.116)$$

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{u}_k^C \exp\left(i2\pi \frac{kj}{N}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{u}_k \exp\left(i2\pi \frac{kj}{N}\right) \quad (32.117)$$

où les  $\hat{u}_k^C$  sont les coefficients de la série de Fourier issus de la décomposition par collocation. On peut alors utiliser une intégration discrète pour projeter (32.117) sur  $\phi_m$  :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{u}_k^C \exp\left(i2\pi \left(\frac{kj}{N} - \frac{jm}{N}\right)\right) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{u}_k \exp\left(i2\pi \frac{kj - jm}{N}\right) \quad (32.118)$$

Or

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp\left(i2\pi j \frac{k-m}{N}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k-m = pN, p \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (32.119)$$

d'où l'on déduit la relation entre les coefficients de la décomposition exacte et ceux de la collocation :

$$\hat{u}_m^C = \tilde{u}_m + \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{u}_{pN+m} \quad (32.120)$$

Ce résultat se comprend assez facilement en remarquant qu'un signal de fréquence  $pN + m$  effectuera  $p$  oscillations de plus qu'un signal de fréquence  $m$  entre les points  $j$  et  $j + 1$ . Ainsi, ces deux signaux, bien que de fréquences différentes pourront avoir les mêmes valeurs aux points de collocation. Ce phénomène est à l'origine du problème d'aliasing dans les méthodes spectrales, dont je reparlerai par la suite.

On voit donc que les méthodes de collocation, bien que pratiques car utilisant l'espace réel des solutions, font apparaître des termes spectraux de haute fréquence qui ne sont pas forcément pertinents physiquement. On préférera donc, lorsque c'est possible, utiliser une méthode de Galerkin, au contenu fréquentiel beaucoup mieux contrôlé. C'est le choix qui a été fait pour ce travail.

Dans la suite du texte, on considérera par simplicité une base sous la forme  $\phi_k(x) = \exp(ikx)$ , sans que ceci ne modifie les résultats.

## 2. L'équation d'advection

### § 33. Stabilité et condition CFL

Comme dans le cas différences finies, nous allons nous intéresser dans un premier temps à l'équation linéaire d'advection, en utilisant la méthode de Galerkin. Cette méthode présente l'avantage de transformer tous les opérateurs de dérivation spatiale en produit algébrique. Ainsi, on écrira l'équation d'advection (17.73) pour  $u(x)$  avec la méthode de Galerkin sous la forme :

$$\partial_t \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \phi_k(x) = -c \partial_x \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \phi_k(x) \quad (33.121)$$

En remarquant que  $\partial_x \phi_k(x) = ik \phi_k(x)$ , une projection sur chacune des fonctions  $\phi_k$  nous permet d'écrire pour tout  $k$  :

$$\partial_t \hat{u}_k = -ikc \hat{u}_k \quad (33.122)$$

L'équation ainsi obtenue est très similaire à celle dérivée avec les solutions tests de Von Neumann (18.77). Cependant, nous n'avons pas considéré ici de solution particulière comme dans le cas d'une analyse de Von Neumann mais bien une solution générale  $u$ , ce qui accroît notablement la portée de l'analyse proposée ici.

La méthode de Galerkin permet donc de se ramener à une équation différentielle ordinaire sur chacun des  $\hat{u}_k$ , d'une forme similaire à (18.85). L'étude de la stabilité de cette équation pour différents schémas temporels ayant déjà été faite pour le cas des schémas différences finies (voir section § 18.2), nous ne rappellerons que les résultats principaux applicables aux schémas spectraux.

En premier lieu, notons qu'un schéma spectral suppose  $f = ik\delta x$  dans (18.84) de sorte que l'argument de  $\mathcal{T}$  dans (18.86) sera toujours imaginaire pur. Ainsi, les figures (15) et (16) montrent clairement qu'une méthode spectrale ne sera stable que pour un schéma de Runge Kutta d'ordre 4 (on notera qu'un schéma Runge Kutta d'ordre 3 peut être stable pour les mêmes raisons). Cette stabilité, comme tous les schémas explicites en temps, est une stabilité conditionnelle. En effet, on peut vérifier que pour le schéma temporel de Runge Kutta d'ordre 4, le taux de croissance d'un pas de temps au suivant est donné par :

$$\tau^2 = 1 + \frac{(ck\delta t)^6}{72} \left( \frac{(ck\delta t)^2}{8} - 1 \right) \quad (33.123)$$

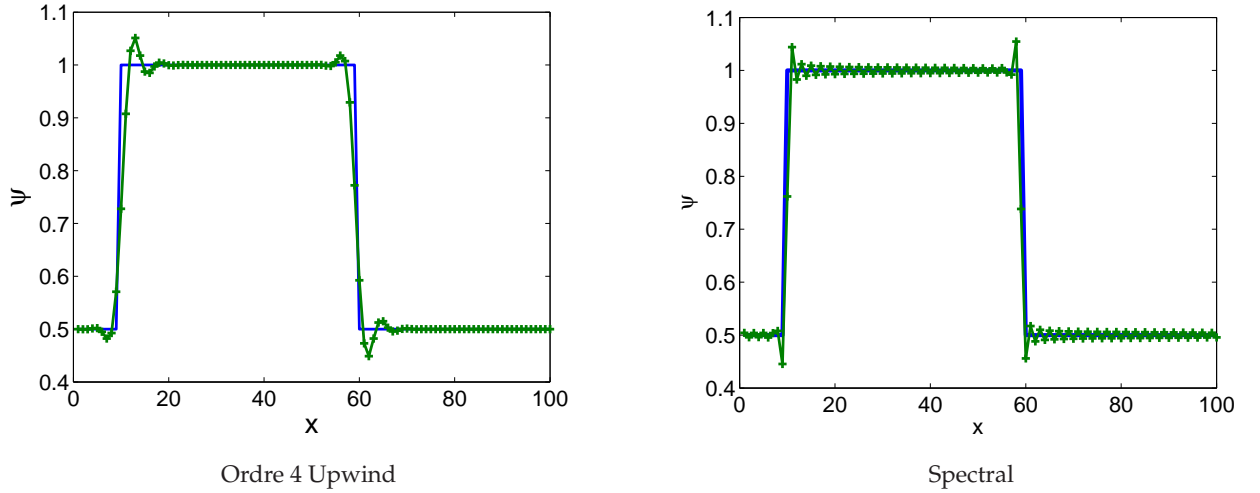
En définissant le plus grand vecteur d'onde accessible sous la forme  $k_{\max} = 2\pi/\delta x$ , ce résultat montre que la condition CFL pour un code spectral utilisant un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 peut s'écrire :

$$\delta t < \frac{\sqrt{8}}{2\pi} \frac{\delta x}{c} \quad (33.124)$$

On voit donc que cette nouvelle condition CFL est 2 fois plus restrictive que la condition classique  $\delta t < \delta x/c$ . Ceci augmente donc naturellement le temps de calcul comparativement à une méthode de différentiation spatiale type différences finies.

### § 34. Test d'advection

Afin de comparer la capacité d'un code spectral à répondre aux différentes discontinuités pouvant être présentes dans une simulation, nous avons testé l'advection d'un créneau, dans



**FIG. 27.** Tests d'advection d'un créneau avec une méthode spectrale et un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4 (20 pas de temps avec  $\Delta t = 0.5$  et  $c = 1$ ). La même advection effectuée à l'aide d'un schéma différences finies est donnée à titre de comparaison.

des conditions similaires aux tests du § 21. Ces tests, présentés sur la figure (27) montrent clairement l'apparition d'oscillations dues à la présence de discontinuités. Comparativement aux schémas aux différences finies centrés (Fig. 20), le schéma arrive à maintenir un niveau d'oscillations très faible. Cependant, il semble que qualitativement, les schémas upwind d'ordre élevé arrivent à obtenir des résultats moins pollués par des problèmes numériques. Notons cependant que l'avantage du schéma spectral est son absence presque totale de diffusion (une légère diffusion venant de l'algorithme d'intégration temporelle de Runge Kutta reste néanmoins présente comme le montre l'équation 33.123). Cet avantage décisif des méthodes spectrales aura une grande importance dans l'étude de la turbulence.

### 3. Non linéarités et méthodes spectrales

#### § 35. Méthodes pseudo-spectrales

On l'a vu dans la section précédente, les méthodes spectrales permettent de transformer très simplement une équation linéaire aux dérivées partielles en une équation ordinaire, en introduisant très peu de diffusion dans le schéma numérique. Cependant, les équations de la mécanique des fluides font appel très souvent à des termes non linéaires, plus difficiles à modéliser spectralement. Ainsi, considérons une équation modèle non linéaire du même type que l'équation de Burgers (23.92) avec  $\nu = 0$  :

$$\partial_t u = -u \partial_x u \quad (35.125)$$

On peut alors écrire en utilisant la représentation de Galerkin :

$$\sum_{k=0}^N (\partial_t \hat{u}_k) \phi_k = -i \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N m \hat{u}_l \hat{u}_m \phi_l \phi_m \quad (35.126)$$



En remarquant que pour une base Fourier,  $\phi_l \phi_m = \phi_{l+m}$ , nous pouvons déduire de (35.126) l'expression de l'évolution temporelle d'un mode sous la forme :

$$\partial_t \hat{u}_k = -i \sum_{m=-N/2}^{N/2} m \hat{u}_m \hat{u}_{k-m} \quad (35.127)$$

Cette équation est donc la retranscription de l'équation de Burgers sans dissipation dans l'espace Fourier en représentation de Galerkin. On remarque par ailleurs que cette transcription fait appel à un produit de convolution : le calcul de l'évolution de chaque onde fait appel au produit de toutes les autres ondes. Le temps de calcul d'une telle équation d'évolution est donc proportionnel à  $N^2$ , ce qui est extrêmement désavantageux en comparaison des méthodes à grille spatiale (c'est d'ailleurs la raison principale de l'absence des méthodes spectrales en mécanique des fluides dans les années 50).

Pour contourner cette difficulté, on peut faire appel aux méthodes pseudo-spectrales : plutôt que de calculer directement le produit de convolution (35.127) dans l'espace spectral, on choisit de calculer les termes non linéaires dans l'espace réel. L'équation (35.127) se transforme alors en un simple produit algébrique. Ce type de méthode est avantageuse dans la mesure où la transformée permettant le passage de l'espace réel à l'espace spectral est plus rapide que le produit de convolution. C'est le cas pour les transformées de Fourier rapides dont le temps de calcul évolue en  $N \log N$ .

A titre d'exemple, supposons que l'on souhaite calculer dans l'espace spectral le produit de deux fonctions  $f$  et  $g$ , dont on ne connaît que les coefficients de Galerkin  $\hat{f}_k$  et  $\hat{g}_k$ . Plutôt que de calculer la convolution de  $f$  et  $g$ , longue en terme de temps de calcul, on applique la procédure pseudo-spectrale suivante :

- (1) Passage de  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  dans l'espace réel à l'aide d'une transformée inverse. On obtient ainsi  $f$  et  $g$ .
- (2) Calcul du produit dans l'espace réel  $fg$ .
- (3) Passage du produit  $fg$  dans l'espace spectral à l'aide d'une transformée directe. On obtient donc finalement les coefficients  $(\widehat{fg})_k$ .

Cette méthode semble a priori efficace. Cependant, l'« aller-retour » dans l'espace réel engendre des effets de bord qu'il est important de maîtriser.

### § 36. Repliement spectral et dealiasing

Pour comprendre les problèmes posés par les méthodes pseudo-spectrales, considérons deux fonctions  $u$  et  $v$  dont nous connaissons la représentation de Galerkin  $\hat{u}_k$  et  $\hat{v}_k$ , et calculons leur produit en utilisant la méthode pseudo-spectrale. Tout d'abord, la transformée discrète inverse nous permet d'écrire pour  $u$  et  $v$  :

$$u(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{u}_k \exp(ikx) \quad (36.128)$$

$$v(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{v}_k \exp(ikx) \quad (36.129)$$

le produit de  $u$  et  $v$  dans l'espace réel s'écrit alors :

$$uv(x) = \sum_{j=-N/2}^{N/2} \sum_{m=-N/2}^{N/2} \hat{u}_j \hat{v}_m \exp[i(j+m)x] \quad (36.130)$$

Finalement, on effectue une transformée de Fourier discrète sur ce résultat en utilisant les points  $x_k = k/N$ . Le résultat obtenu par la méthode pseudo-spectrale s'écrit ainsi :

$$(\widehat{uv})_n = \sum_{j=-N/2}^{N/2} \sum_{m=-N/2}^{N/2} \sum_{k=1}^N \hat{u}_j \hat{v}_m \exp\left(2i\pi(j+m-n)\frac{k}{N}\right) \quad (36.131)$$

Cette somme sera non nulle uniquement pour les termes tels que :

$$j + m - n = pN \quad (36.132)$$

où  $p \in N$ . Remarquons alors que l'on ne retrouvera l'expression de la convolution (35.127) que si la seule solution à (36.132) est  $p = 0$ . Or  $j, m$  et  $n$  varient dans l'intervalle  $[-N/2, N/2]$ , on peut donc obtenir des combinaisons telles que  $p$  soit un entier non nul : c'est le problème du repliement spectral.

Ce phénomène peut être vu sous un angle physique assez simple : les termes non linéaires, tels que ceux présents dans les équations de transport, combinent deux à deux les ondes pour en produire de nouvelles. Les vecteurs d'onde ainsi obtenus sont soit la somme, soit la différence des vecteurs des ondes initiales. Les ondes créées qui ont une fréquence spatiale supérieure à la fréquence de Nyquist sortent alors du domaine spectral  $[-N/2, N/2]$  et devraient en toute rigueur disparaître. En fait, la méthode pseudo-spectrale garde une trace de ces ondes en les faisant réapparaître dans le domaine spectral à un vecteur d'onde inférieur  $k' = k - pN$  (voir Fig. 28).

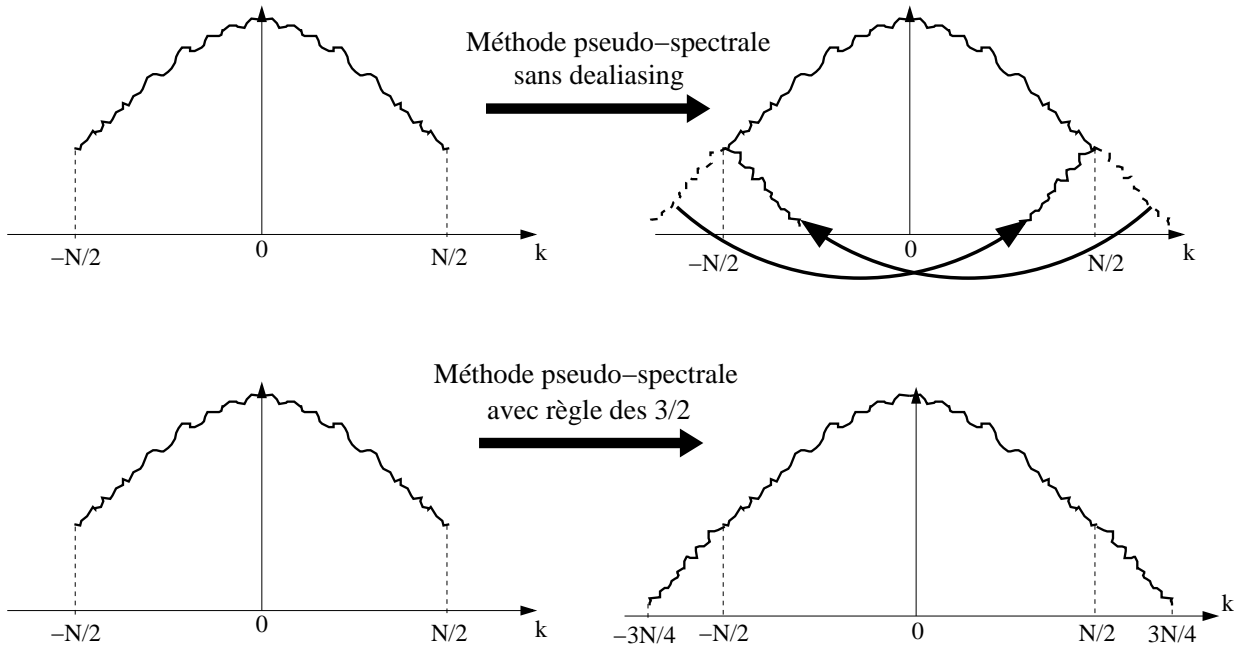
Ce phénomène donne alors lieu à l'apparition d'ondes parasites de fréquences élevées dans la simulation, pouvant mener jusqu'au *crash* du code utilisé. Il est donc important de contrôler, voir d'éliminer ces ondes hautes fréquences : c'est le dealiasing.

La méthode de dealiasing que j'ai utilisée est la « règle des 3/2 ». Cette méthode présente l'avantage d'être très efficace et relativement peu coûteuse en temps de calcul. L'idée est d'étendre le domaine spectral jusqu'à une taille  $M > N$ . Si  $M$  est suffisamment grand, les ondes créées par le terme non linéaire dans l'espace de taille  $N$  peuvent toutes être représentées dans l'espace de taille  $M$ . En pratique, on se définit donc un espace spectral de vecteurs d'onde  $[-M/2, M/2]$ . Les ondes appartenant aux domaines  $[-M/2, -N/2 - 1]$  et  $[N/2 + 1, M/2]$  voient leur amplitude fixée à 0. On obtient ainsi la même représentation que dans l'espace  $N$ . Un calcul similaire à (36.131) montre alors que la méthode pseudo-spectrale donnera des ondes d'amplitudes non nulles si :

$$j + m - n = pM \quad (36.133)$$

où  $j, m, n \in [-N/2, N/2]$ , cette équation étant l'extension de (36.132). On comprend alors que si on fixe  $M$  tel que  $M > 3N/2$ , le repliement spectral sera effectivement inexistant car la seule solution à (36.133) sera  $p = 0$  : c'est la règle des « 3/2 » (voir la deuxième partie de la figure 28).

En pratique, pour une résolution effective  $N$ , on fera tous les calculs en dimension  $3N/2$ , en ayant rempli de 0 le tableau de travail dans les intervalles  $[-3N/4, -N/2 - 1]$  et  $[N/2 + 1, 3N/4]$ . A l'issue du calcul d'un terme non linéaire par une méthode pseudo-spectrale, on prendra soin de réinitialiser ces intervalles à 0. On pourrait en théorie utiliser des tableaux de



**FIG. 28.** Comparaison des méthodes pseudo-spectrales sans dealiasing et avec la règle des «3/2». A gauche, on donne le spectre d'une fonction dont on veut calculer le carré. A droite, dans le calcul sans dealiasing, l'énergie spectrale devant apparaître à haute fréquence se voit «repliée» vers les fréquences plus basses (flèches) : c'est l'aliasing. La règle des 3/2 contourne ce problème en allouant un espace supplémentaire pour ces ondes hautes fréquences.

taille  $N$ , et utiliser transitoirement des tableaux de dimension  $3N/2$  pour calculer les termes non linéaires. Dans les faits, le passage d'une représentation de taille  $N$  à  $3N/2$  est extrêmement coûteux en terme d'échange de données dans un code parallélisé, et n'est pas utilisable en pratique.

Remarquons enfin que cette méthode introduit une nouvelle dissipation numérique : les ondes hautes fréquences qui apparaissent dans le domaine spectral réinitialisé sont perdues. Cependant, le contrôle du bilan énergétique montrera que cette dissipation est en principe largement inférieure à la diffusion induite par les termes de viscosité et résistivité, et donc tout à fait négligeable.

## 4. Traitement du cisaillement

### § 37. Système de coordonnées cisailées

Comme nous l'avons vu, le code développé pour ce travail de thèse utilise les bases de Fourier, qui sont de nature périodique. On suppose donc *nécessairement* des conditions aux limites périodiques dans toutes les simulations effectuées avec un tel code. Cependant, la physique des disques d'accrétion s'accommode mal de ces conditions aux limites, le problème principal venant du cisaillement. Comme nous l'avons vu dans la première partie, les équations fluides dans un disque font systématiquement intervenir un terme de cisaillement de la forme :

$$\partial_t \psi + S y \partial_x \psi = \dots \quad (37.134)$$

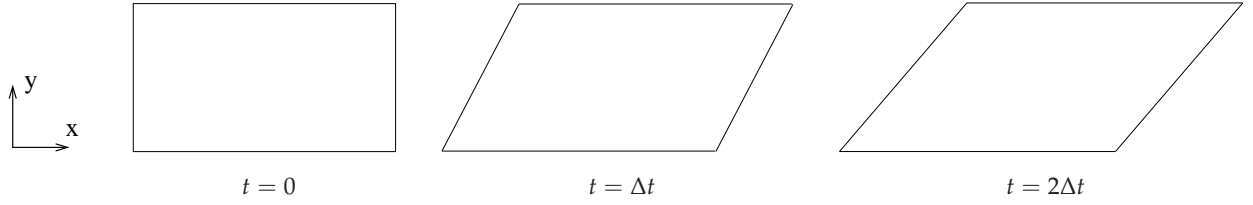


FIG. 29. Évolution en fonction du temps d'une boîte définie à partir des coordonnées cisillées (37.135).

Où  $S = -rd\Omega/dr$  est le cisaillement local. Si l'on considère à présent une structure périodique dans la direction radiale à  $t = 0$ , le cisaillement du disque d'accrétion va naturellement déformer cette structure qui va alors immédiatement perdre sa périodicité radiale. On ne pourra donc pas approcher localement la structure d'un disque d'accrétion par une simple boîte périodique. D'un point de vue analytique, la non compatibilité des équations cisillées telles que (37.134) avec des conditions aux limites périodiques vient de la présence explicite de la coordonnée  $y$ . On remarquera en effet qu'un tel terme ne peut être représenté de manière correcte dans l'espace de Fourier.

Une méthode permettant de contourner cette difficulté est d'utiliser un référentiel cisillé définit par :

$$x' = x - S y t \quad y' = y \quad z' = z \quad (37.135)$$

Dans ce nouveau référentiel, les équations fluides peuvent être écrites sous la forme :

$$\partial_{t'} \psi = \dots \quad (37.136)$$

dans laquelle on aura pris soin de remplacer les dérivées radiales  $\partial_y$  par  $\partial_{y'} - S t \partial_{x'}$ . La dépendance explicite en espace a donc disparue au profit d'une dépendance explicite en temps. Notons cependant que cette dernière ne pose pas de problème technique particulier pour une méthode spectrale. Physiquement, ce changement de référentiel revient à utiliser une boîte cisillée comme représentée sur la figure (29). On suppose alors que les conditions aux limites dans cette boîte sont périodiques, ce qui nous permet d'obtenir des simulations locales de disques d'accrétion (ce type d'approche est en fait en tout point identique à l'utilisation des conditions aux limites shearing sheet que l'on a discuté au chapitre précédent).

### § 38. Procédure de remappage

On pourrait *a priori* se contenter du changement de variable évoqué précédemment pour effectuer une simulation. Cependant, comme je vais le montrer, les ondes simulées par le code deviennent non pertinentes pour la physique qui nous intéresse. Il convient alors d'effectuer une procédure de rééchantillonnage que je vais décrire ici. Commençons donc par identifier le problème physique.

#### § 38.1. Pertinence physique des ondes cisillées

Dans la section précédente, j'ai montré qu'il était nécessaire de résoudre les équations de la mécanique des fluides dans un système de coordonnées cisillées que l'on notera en 2D  $(x', y')$ .

Les ondes de la base de Fourier peuvent ainsi être définies avec les vecteurs d'ondes discrets  $k'_x = 2\pi p/L_x$  et  $k'_y = 2\pi q/L_y$  tels que :

$$\phi_{pq}(x', y') = \exp [i(k'_x x' + k'_y y')] \quad (38.137)$$

où  $p$  et  $q$  sont des entiers relatifs. En pratique, on choisira une résolution  $(N_x \times N_y)$  telle que  $-N_x/2 < p < N_x/2$  et  $-N_y/2 < q < N_y/2$ , ce qui définira un ensemble discret d'ondes  $(k'_x, k'_y)$  qui seront résolues dans une simulation. Malheureusement, comme je vais le montrer, ce schéma simple n'est pas suffisant pour obtenir une simulation physiquement pertinente.

Pour commencer, replaçons nous dans le système de coordonnées initial non cisailé  $(x, y)$ . Les ondes de la base Fourier  $\phi$  prennent alors la forme :

$$\phi_{pq}(x, y) = \exp \left( i[k'_x x + (k'_y - St k'_x) y] \right) \quad (38.138)$$

Les ondes cisillées (ou *shwaves*, pour « shearing waves ») ainsi obtenues peuvent être définies à partir d'un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  du référentiel  $(x, y)$  tel que :

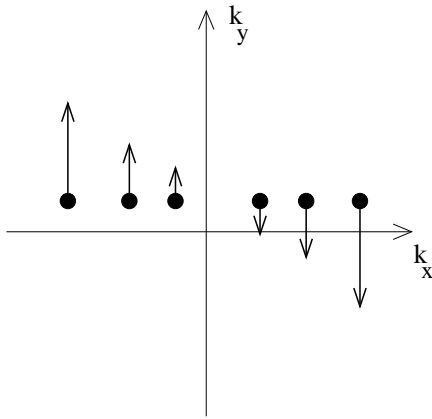
$$\phi_{pq}(x) = \exp(i2\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (38.139)$$

On a alors :

$$k_x = k'_x \quad (38.140)$$

$$k_y = k'_y - k'_x St$$

Ce résultat est l'équivalent spectral de (37.135). Il montre en effet que l'espace spectral est cisailé dans la direction  $k_x$ . En pratique, les ondes de la base de Fourier utilisées dans la simulation précédente se déplacent dans l'espace spectral défini par  $(k_x, k_y)$  selon la figure (30).

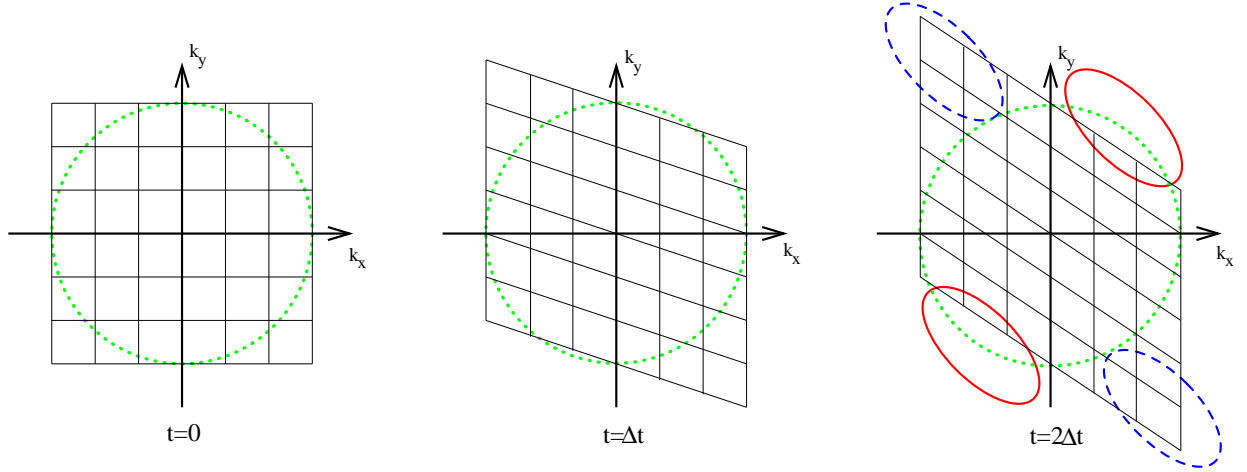


**FIG. 30.** Cisaillement de l'espace spectral  $(k_x, k_y)$ . Les points représentent les ondes de la base Fourier (38.137) utilisées dans le code. Ces ondes se déplacent dans l'espace spectral  $(k_x, k_y)$  (flèches) et montrent que cet espace spectral est cisailé.

De manière générale, les ondes que l'on simule peuvent être vues comme un ensemble de points de grille dans l'espace spectral. Cette grille de simulation est alors cisillée de la même manière que précédemment, et l'évolution temporelle montre que l'on aboutit à une représentation incomplète de l'espace physique (Fig. 31).

Tout d'abord, remarquons que l'on peut séparer sur cette figure deux types d'ondes : les ondes de tête, dont la fréquence spatiale  $|k_y|$  diminue au cours du temps, et les ondes de traîne pour lesquels  $|k_y|$  augmente<sup>13</sup>. On peut aussi définir une fréquence spatiale de dissipation, à la manière de ce que l'on rencontre en turbulence homogène (voir § 40 p. 79). Pour des fréquences

<sup>13</sup>En fait, les ondes de tête finissent forcément par devenir des ondes de traîne, mais ceci ne change rien au raisonnement.



**FIG. 31.** Le cisaillement de la grille spectrale induit 2 effets de bords au cours du temps. D'une part, la fréquence spatiale des ondes de traîne augmente, et certaines d'entre elles passent dans le domaine dissipatif de l'écoulement (cercles tiretés). D'autre part, des ondes de tête sortent du domaine dissipatif et deviennent *a priori* pertinentes pour la physique de l'écoulement (cercles pleins). Elles ne sont cependant pas traitées par la simulation. NB : On a représenté en pointillés les limites du domaine dissipatif de l'écoulement.

spatiales plus élevées que cette fréquence de dissipation, les ondes sont essentiellement diffusées. On parlera alors de domaine dissipatif de l'écoulement.

En reprenant la figure (31), on voit que les ondes de traîne qui étaient à des fréquences élevées à  $t = 0$  se retrouvent à très haute fréquence, et terminent donc dans le domaine dissipatif de l'écoulement : elles deviennent négligeables. Dans le même temps, des ondes de tête, qui étaient négligeable à  $t = 0$  pour les mêmes raisons, voient leur fréquence spatiale diminuer. Elles sortent donc du domaine dissipatif et deviennent pertinentes pour la physique de l'écoulement. Cependant, n'étant pas incluses dans la simulation à  $t = 0$ , ces ondes ne sont pas traitées numériquement. Au bout d'un certain temps, on comprend donc que la grille de simulation définie plus haut ne représente plus la physique de l'écoulement. Il faut alors faire appel à une procédure, dite de remappage (ou *remap*), qui permet de maintenir la grille de simulation au voisinage du domaine spectral qui est physiquement pertinent.

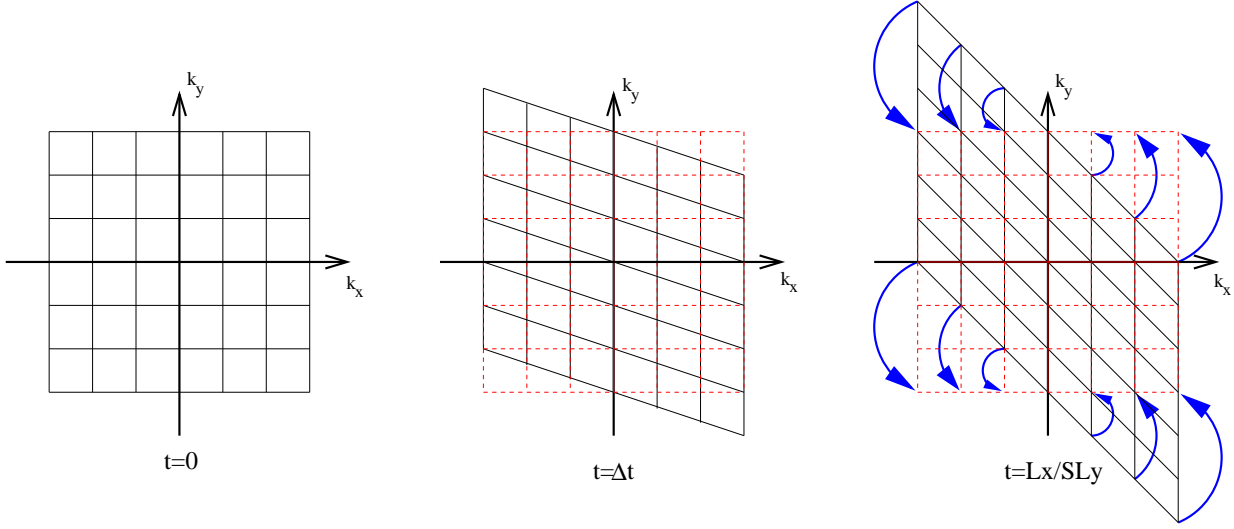
### § 38.2. Description du remappage

Pour commencer, on définit une grille fixe dans l'espace  $(k_x, k_y)$ , qui est superposée à la grille de simulation à  $t = 0$ . En laissant évoluer cette dernière, les points de grille viendront se superposer de nouveau sur la grille fixe tous les  $t_{\text{MAP}} = L_x / SL_y$  (Fig. 32).

La procédure de remappage consiste alors à changer les ondes représentées par la grille de simulation à  $t = t_{\text{MAP}}$ . On enlève donc les ondes de traîne qui sont dissipées par l'écoulement, et on les remplace par des ondes de tête. Ainsi, en utilisant la définition (38.137), on dira qu'à l'issu du remappage, la simulation représente les ondes de vecteur  $\mathbf{K}'$ , défini à partir de (38.140) par :

$$K'_x = k'_x \quad (38.141)$$

$$K'_y = k'_y - k'_x St_{\text{MAP}} \quad (38.142)$$



**FIG. 32.** Principe de la procédure de remappage : on se fixe une grille fixe superposée à la grille de simulation à  $t = 0$  (en pointillés). La grille de simulation, cisailée, vient ensuite se superposer tous les  $t_{\text{MAP}} = L_x / SL_y$  sur les points de la grille fixe. On peut alors effectuer un remappage en changeant les ondes représentées par la grille de simulation (flèches).

En notant  $K'_x = 2\pi p' / L_x$  et  $K'_y = 2\pi q' / L_y$ , la relation précédente revient à poser :

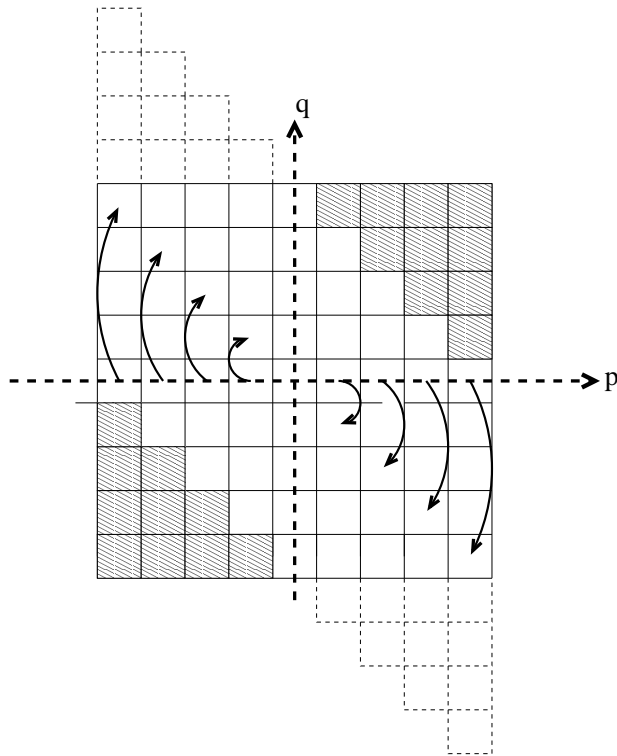
$$p' = p \quad (38.143)$$

$$q' = q - p \quad (38.144)$$

Le remappage revient donc finalement à effectuer une réallocation des ondes sur la grille, telle qu'elle est décrite sur la figure (33). On remarque alors que certaines ondes sortent de la grille pendant la procédure. Ces ondes correspondent en pratique aux ondes de traîne qui passent dans le domaine dissipatif à  $t \sim t_{\text{MAP}}$  et sont donc effectivement négligeables. D'autre part, l'ajout des zéros est dû à l'inclusion des ondes de tête décrites précédemment. Si la résolution de la simulation est suffisante, ces ondes seront encore dans le domaine dissipatif à  $t \sim t_{\text{MAP}}$ . Ainsi, approximer leur amplitude à 0 ne sera pas pénalisant pour la suite de la simulation.

L'un des problèmes de ces simulations réside naturellement dans la dissipation induite par cette procédure. En particulier, les ondes de traîne qui sont éliminées de la simulation lors du remappage constituent une forme de dissipation numérique. Néanmoins, si la résolution est suffisante, cette perte d'énergie devrait être faible comparativement à la dissipation physique, car ces ondes seront déjà largement diffusées avant d'être éliminées de la simulation.

Un autre problème est la pertinence physique des ondes de tête qui sont incluses au fur et à mesure. En particulier, on peut s'interroger sur le comportement de ces ondes, si on les avait suivies depuis leur origine à très haute fréquence spatiale. Malheureusement, il est difficile de contrôler les artefacts introduits sur ces ondes, sinon en faisant un test de résolution. On peut néanmoins supposer que dans le domaine dissipatif, à fréquences spatiales égales, ondes de traîne et ondes de tête devraient avoir une amplitude du même ordre. Ainsi, si le remappage introduit peu de dissipation numérique, on peut supposer que l'amplitude des ondes de tête est suffisamment faible pour pouvoir être négligée. Le contrôle de la dissipation numérique introduit ainsi un contrôle partiel sur l'approximation des ondes de tête.



**FIG. 33.** Exemple de remappage d'une grille de simulation. Les éléments sont déplacés sur toutes les colonnes  $p = cte$  en suivant les flèches. Les éléments qui sortent de la grille (pointillés) sont les ondes de traîne à haute fréquence, situées dans le domaine dissipatif. Les zones hachurées sont *a priori* inconnues : ce sont les ondes de tête discutées précédemment. Il faut alors que la résolution soit suffisante pour qu'elles apparaissent lorsqu'elles sont encore dans le domaine dissipatif. On peut ainsi initialiser leur amplitude à 0.

En pratique, dans les simulations que je proposerai ici, le taux de dissipation numérique totale (incluant les effets de dealiasing, *etc.*) sera systématiquement inférieur à 3% du taux de dissipation physique. On pourra donc conclure que l'influence de cette procédure est négligeable sur la dynamique générale de l'écoulement.





# Partie III

## Instabilité sous-critique hydrodynamique

6	Instabilité sous-critique en mécanique des fluides	75
7	Instabilité sous-critique dans les disques d'accrétion	89
8	Efficacité de la turbulence sous-critique	101



# 6

## Instabilité sous-critique en mécanique des fluides

« Le coeur de la femme est aussi instable  
qu'une goutte d'eau sur une fleur de lotus »

— Confucius

### Plan du chapitre

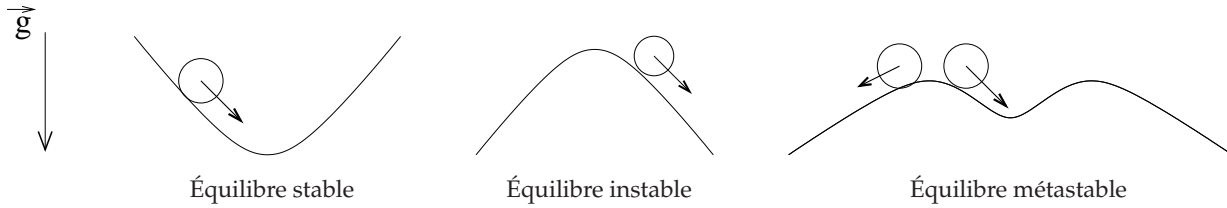
1. Instabilités et turbulence.....	75
§ 39. Définitions.....	75
§ 39.1. Instabilités en Mécanique.....	75
§ 39.2. Instabilités en mécanique des fluides.....	76
§ 39.3. Turbulence.....	78
§ 40. Dynamique de la turbulence : le modèle de Kolmogorov.....	79
§ 41. Un modèle phénoménologique d'instabilité non linéaire.....	80
§ 41.4. Viscosité turbulente, modèle de Boussinesq.....	80
§ 41.5. Bilan Énergétique.....	80
§ 41.6. Modèle spectral, mécanisme d'auto-entretien.....	81
2. Exemple d'instabilité sous-critique : l'écoulement de Couette.....	83
§ 42. Présentation.....	83
§ 43. Mécanisme d'auto-entretien dans l'écoulement de Couette plan.....	84
§ 43.7. Paramètres.....	84
§ 43.8. Mise en évidence du cycle d'auto-entretien.....	84

### 1. Instabilités et turbulence

#### § 39. Définitions

##### § 39.1. Instabilités en Mécanique

**L**ES INSTABILITÉS sont des phénomènes extrêmement communs en physique. Ces dernières expliquent des processus aussi variés (et complexes) que la formation des nuages, la radioactivité ou encore le son de certains instruments de musique. De manière générale, une instabilité est définie pour un équilibre donné. On parlera d'équilibre lorsque le système est dans un état qui n'évolue pas au cours du temps (état



**FIG. 34.** Les différents états de stabilité au voisinage d'un équilibre. Ici une bille sur un support courbe. On suppose le champ de gravité vertical et uniforme.

stationnaire). La stabilité d'un équilibre s'étudie alors en modifiant (de manière plus ou moins forte) l'état du système initialement en équilibre. Si, quelque soit la perturbation, le système s'éloigne de l'équilibre, on parlera d'équilibre inconditionnellement instable. Si au contraire, le système rejoint l'équilibre pour toutes les perturbations, on parlera d'équilibre inconditionnellement stable.

Pour illustrer ces exemples, considérons une bille soumise à la gravité, posée sur un support solide en forme de « u » (voir Fig. 34), et supposons que ce support soit infini. La position au fond du « u » est un état d'équilibre (la bille posée précisément en ce point ne bougera pas). De plus, quelque soit l'endroit où la bille est initialement placée, elle rejoindra forcément le fond du « u » : l'équilibre est alors inconditionnellement stable. Si l'on suppose à présent une forme en « n », le sommet du support est aussi un point d'équilibre. Cependant, si l'on pose la bille ailleurs qu'au point d'équilibre, elle s'éloignera : l'équilibre est inconditionnellement instable.

Il existe un cas intermédiaire : l'équilibre métastable. Dans ce cas, la surface présente une forme ondulée caractéristique (voir Fig. 34). Si la perturbation est suffisamment faible au voisinage de l'équilibre, la bille retourne dans cet état. Si la perturbation est suffisamment forte, on obtient un comportement similaire à un état instable. On peut donc voir un équilibre métastable comme un équilibre *local*.

### § 39.2. Instabilités en mécanique des fluides

En mécanique des fluides, l'état d'équilibre de référence est, par définition, l'état où les lignes de courant sont stationnaires et varient peu spatialement. On parle alors d'écoulement laminaire (notons néanmoins que le fluide peut être en mouvement dans cet état d'équilibre). Par analogie avec la mécanique, l'écoulement sera alors instable si on peut trouver une perturbation telle qu'il ne retourne pas dans l'état laminaire. Notons qu'il peut néanmoins trouver un nouvel état d'équilibre, instationnaire et plus ou moins complexe.

- **Construction de nombres sans dimension.** De la même manière qu'en mécanique, les instabilités peuvent être de plusieurs natures. Pour les distinguer, il convient d'analyser les équations de la dynamique des fluides, par exemple pour un écoulement incompressible : l'équation de Navier Stokes s'écrit :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \psi + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (39.145)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (39.146)$$

L'équation du mouvement (39.145) permet de distinguer les phénomènes principaux mis en jeu dans un écoulement. Tout d'abord, le fluide se transporte lui-même : une particule fluide ayant

une vitesse  $v$  se déplacera de  $v dt$  en un temps  $dt$ . Cette advection est décrite par le terme non linéaire  $v \cdot \nabla v$ . Comme nous le verrons par la suite, c'est cette non linéarité qui engendre toute la complexité (et la richesse) des écoulements turbulents. Le premier terme du membre de droite est une force de pression ( $\psi = P/\rho$  où la densité  $\rho$  est une constante). On peut le considérer comme un multiplicateur de Lagrange contraint par l'équation de continuité (39.146). Enfin, nous introduisons la dissipation visqueuse qui peut être vue comme un frottement entre les particules fluides. Cette dissipation est quantifiée par la viscosité cinématique  $\nu$ .

A partir de ces ingrédients physiques, on peut être tenté d'évaluer quels sont les termes dominants dans l'équation (39.145). Pour se faire, il faut connaître les quantités physiques de l'écoulement : sa taille  $L$ , sa vitesse caractéristique  $V$  et sa viscosité  $\nu$ . On peut alors quantifier les deux termes physiques par :

$$v \cdot \nabla v \sim V^2/L \quad (39.147)$$

$$\nu \Delta v \sim \nu V/L^2 \quad (39.148)$$

le rapport de force entre les deux termes est alors un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds qui s'écrit :

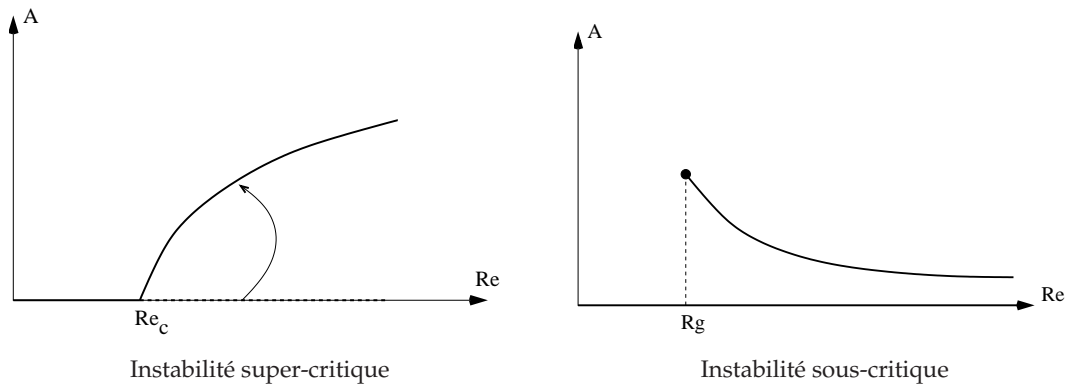
$$Re = \frac{VL}{\nu} \sim \frac{v \cdot \nabla v}{\nu \Delta v} \quad (39.149)$$

Lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment petit, l'équation (39.145) est dominée par des effets visqueux : elle est essentiellement linéaire et donne en principe lieu à des écoulements laminaires stables. Au contraire, à grand nombre de Reynolds, l'équation du mouvement est essentiellement non linéaire, produisant ainsi des écoulements plus ou moins turbulents. Ce nombre est donc un paramètre permettant de quantifier, *a priori*, la stabilité d'un écoulement.

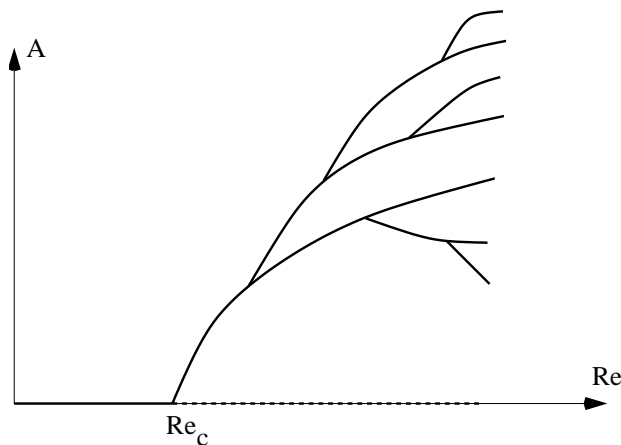
• **Instabilités sous-critiques et super-critiques.** Pour différencier ces deux types d'instabilité, on utilise couramment le nombre de Reynolds de l'écoulement  $Re$  et l'amplitude de la perturbation introduite. On parlera alors d'instabilité super-critique lorsque l'écoulement laminaire devient instable à partir d'un certain Reynolds, et ce, *quelque soit* l'amplitude de la perturbation appliquée à l'écoulement (voir Fig. 35). Au contraire, une instabilité sera sous-critique si elle nécessite une amplitude minimum pour apparaître (cette amplitude minimum étant *a priori* une fonction de  $Re$ ). On pourra alors parler d'un écoulement métastable.

Techniquement, le fait qu'une instabilité super-critique puisse exister pour des amplitudes arbitrairement faibles permet de les étudier analytiquement en *linéarisant* l'équation de la dynamique en fonction des perturbations, supposées infinitésimales. Ce type d'approche permet alors d'obtenir une équation différentielle linéaire dont l'étude est notoirement plus simple que le problème complet. On peut ainsi obtenir les modes propres de l'équation linéarisée et une instabilité sera alors caractérisée par la croissance spontanée d'un ou plusieurs modes propres. En ce sens, les instabilités super-critiques sont aussi appelées *instabilités linéaires*.

Pour les instabilités sous-critiques, la linéarisation est impossible. En effet, l'existence d'une amplitude minimum pour obtenir l'instabilité signifie qu'il faut aussi considérer les termes non linéaires dans l'équation (39.145). On peut néanmoins utiliser une première linéarisation pour obtenir, comme dans le cas précédent, les modes propres. Cependant, ces modes resteront stables. Ainsi, contrairement au cas précédent, l'instabilité ne proviendra non pas d'une croissance spontanée d'un mode mais d'un couplage non linéaire entre plusieurs modes propres. On parlera alors d'une *instabilité non linéaire*.



**FIG. 35.** Les deux grandes classes d'instabilité en mécanique des fluides. Dans le cas super-critique, l'écoulement laminaire est inconditionnellement instable pour un  $Re > Re_c$  et transite spontanément vers un nouvel état d'équilibre (flèche). Dans le cas sous-critique, la transition se fera si  $Re > R_g$  et si l'amplitude de la perturbation est suffisamment importante. L'état laminaire est donc métastable pour  $Re > R_g$ .

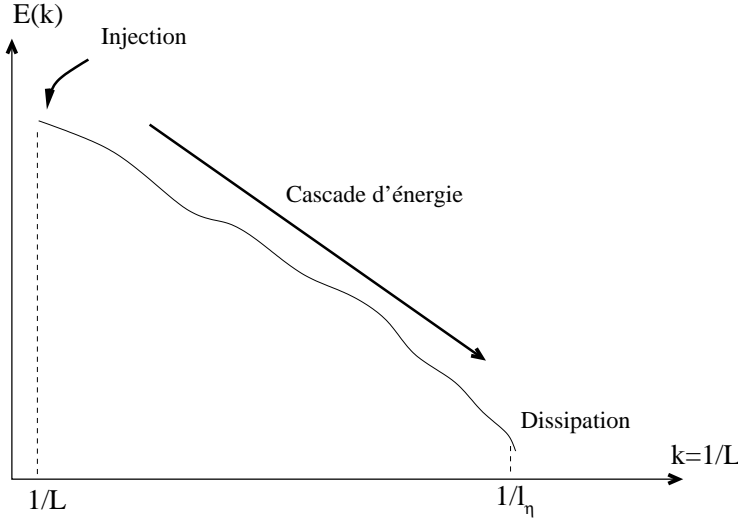


**FIG. 36.** Succession de bifurcations menant vers la turbulence développée dans le cas d'une instabilité super-critique. L'écoulement passe spontanément de l'une à l'autre des branches, menant à un écoulement totalement chaotique à un Reynolds suffisamment élevé par rapport à  $Re_c$ .

### § 39.3. Turbulence

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que l'état laminaire et un état d'équilibre secondaire, donnant un écoulement instationnaire. En pratique, ces « branches » peuvent être nombreuses et décrire des écoulements très différents. Ainsi, de nouvelles branches peuvent apparaître lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds, l'écoulement « sautant » alors d'une branche à l'autre (voir Fig. 36). À un Reynolds suffisamment élevé, les branches sont extrêmement nombreuses et complexes, l'écoulement devient alors chaotique : c'est la turbulence. Un état turbulent est donc caractérisé par une grande complexité, des mouvements sur une grande gamme d'échelles de temps et de fréquences. De plus, un tel écoulement est imprévisible sur le long terme : un écart infinitésimal entre deux conditions initiales s'accroît rapidement au cours du temps jusqu'au point où les 2 solutions sont totalement différentes (il s'agit là du problème fondamental des prévisions météorologiques).

On le comprend, la description analytique rigoureuse d'un écoulement turbulent est totalement hors de portée et il faut faire appel aux simulations numériques pour effectuer de telles études. Cependant, il est possible d'obtenir des descriptions statistiques de ces écoulements pour en dégager les lois fondamentales.



**FIG. 37.** Principe de la cascade de Kolmogorov : Injection aux grandes échelles, cascade d'énergie par formation de petites échelles puis dissipation pour  $l = l_\eta$ . La forme de  $E(k)$  est donnée ici à titre indicatif.

#### § 40. Dynamique de la turbulence : le modèle de Kolmogorov

La théorie statistique de la turbulence la plus simple est la théorie de Kolmogorov, qui suppose un écoulement homogène et isotrope. Dans ce cadre, on décrit l'écoulement par son spectre en énergie  $E(k)$ . On introduit alors 2 échelles fondamentales : l'échelle d'injection  $L$  et l'échelle de dissipation (ou échelle de Kolmogorov)  $l_\nu$ .

On modélise alors la dynamique de l'écoulement par une « cascade » de Kolmogorov : l'énergie est injectée dans l'écoulement à l'échelle  $L$ . Comme  $Re \gg 1$  la dissipation n'a aucun effet à ces échelles. Les mouvements turbulents engendrent donc par couplage non linéaire des structures de plus en plus petites *sans dissipation* : l'énergie des grandes échelles est transférée intégralement vers les petites échelles (on parlera alors de domaine inertiel). Cependant, à l'échelle  $l_\eta$ , la dissipation ne devient plus négligeable, on peut alors définir un nombre de Reynolds à l'échelle  $l_\eta$  tel que :

$$Re_\eta = \frac{v_\eta l_\eta}{\nu} = 1 \quad (40.150)$$

où  $v_\eta$  est l'amplitude de fluctuation du champ de vitesse à l'échelle  $l_\eta$ . A cette échelle on dissipe donc l'énergie injectée au début de la cascade (voir Fig. 37).

La conservation de l'énergie nous permet donc d'affirmer que le long de la cascade, le taux de transfert d'énergie  $\epsilon$  ne dépend pas de l'échelle  $l$ , ce que l'on écrira sous la forme :

$$\epsilon = v_l^3 / l = \text{cte} \quad (40.151)$$

En particulier, le taux d'injection à l'échelle  $L$  est égale au taux de dissipation à l'échelle  $l_\eta$  soit :

$$V^3 / L = v_\eta^3 / l_\eta \quad (40.152)$$

En utilisant la définition de  $l_\eta$  (40.150), il vient alors naturellement :

$$\frac{L}{l_\eta} = Re^{3/4} \quad (40.153)$$

Cette relation nous permet donc d'avoir une idée de l'échelle de dissipation d'un écoulement. De plus, on pourra remarquer que dans le domaine inertiel, l'énergie  $E(k)$  ne peut dépendre que du nombre d'onde  $k$  et du taux de transfert  $\epsilon$ . Une analyse dimensionnelle nous permet alors



d'écrire :

$$E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (40.154)$$

où  $C_K$  est la constante de Kolmogorov. En pratique, les expériences de turbulence homogène montrent que  $C_K \simeq 1.5$  (Bailly & Comte-Bellot 2003). Ainsi, un spectre en  $k^{-5/3}$  est symptomatique d'une région de transfert inertiel c'est-à-dire où l'énergie est simplement transférée vers les petites échelles.

## § 41. Un modèle phénoménologique d'instabilité non linéaire

### § 41.1. Viscosité turbulente, modèle de Boussinesq

Considérons un fluide turbulent régi par l'équation (39.145) pour lequel on décompose son champ de vitesse sous la forme  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}'$  où  $\bar{\mathbf{V}}$  est une moyenne d'ensemble de  $\mathbf{v}$  (on ne supposera pas que  $\mathbf{v}'$  est petit). On peut alors écrire l'équation (39.145) sous sa forme moyennée :

$$\partial_t \bar{V}_i + \bar{V}_j \partial_j \bar{V}_i = -\partial_i \bar{\psi} + \partial_j (\bar{\sigma}_{ij} - \overline{v'_i v'_j}) \quad (41.155)$$

où l'on a réécrit le terme de dissipation visqueuse en utilisant le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij} = \nu(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$ . On voit donc que les corrélations des fluctuations turbulentes  $\overline{v'_i v'_j}$  apparaissent sous la même forme qu'une contrainte visqueuse dans l'équation moyennée. Ce tenseur, appelé tenseur de Reynolds, doit être approximé par une fonction des vitesses moyennes  $\bar{\mathbf{V}}$  pour pouvoir résoudre de manière approchée (41.155). Pour ce faire, on pourra remarquer que dans le cas où tous les gradients de vitesse sont nuls, on peut se ramener par transformation galiléenne à un fluide en moyenne au repos ( $\bar{\mathbf{V}} = 0$ ). Dans ce cas, on s'attend à ce que la turbulence disparaisse par absence d'excitation. On peut donc écrire :

$$\overline{v'_i v'_j} = f_{ijkl}(\bar{V}_m) \partial_k \bar{V}_l \quad (41.156)$$

où  $f$  s'annule quand son argument s'annule. Une première approximation pour  $f$  est de supposer que l'on peut écrire (41.156) comme un tenseur des contraintes sous la forme :

$$\overline{v'_i v'_j} = \nu_t (\partial_i \bar{V}_j + \partial_j \bar{V}_i) \quad (41.157)$$

où  $\nu_t$  est le coefficient de viscosité turbulente. Cette approximation, appelée approximation de Boussinesq, revient à supposer que les mouvements turbulents augmentent la dissipation due au transfert aux petites échelles décrit précédemment. On peut ainsi comparer la diffusion turbulente à la diffusion moléculaire classique en supposant que les éléments fluides échangés ont une taille typique  $l_M$  plus grande que l'échelle moléculaire et une vitesse  $v_M$ .

Remarquons cependant qu'il s'agit là du modèle de clôture le plus simple. On pourra ainsi trouver des modèles de clôtures du tenseur de Reynolds plus évolués dans Lesieur (1990) et Speziale (1991) ainsi qu'une discussion sur les limites du modèle de viscosité turbulente dans Bailly & Comte-Bellot (2003).

### § 41.2. Bilan Énergétique

Pour obtenir l'équation d'énergie du champ turbulent, nous commençons par écrire l'équation d'évolution de la déviation à la moyenne comme étant la différence entre l'équation complète (39.145), et l'équation moyennée (41.155), ce que l'on écrira :

$$\partial_t v'_i + \partial_k (v'_i \bar{V}_k + \bar{v}'_k \bar{V}_i + v'_i v'_k) = -\partial_i \psi' + \partial_k (\overline{v'_i v'_k} + \sigma'_{ij}) \quad (41.158)$$

où  $\sigma'_{ij} = \nu(\partial_i v'_j + \partial_j v'_i)$ . On obtient alors l'équation d'évolution moyenne de l'énergie turbulente en multipliant (41.158) par  $v'_i$  et en sommant sur  $i$  :

$$\begin{aligned} \partial_t e^2 + \partial_k e \overline{V_k} &= -\overline{v'_i v'_j} \partial_k \overline{V_i} - \overline{\sigma'_{ik}} \partial_k \overline{v'_i} \\ &+ \partial_k \left( \overline{v'_i \sigma'_{ik}} - \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_k} - \overline{v'_k \psi'} \right) \end{aligned} \quad (41.159)$$

où  $e = v'^2/2$ . Les termes en divergence représentent la diffusion du champ turbulent par des effets respectivement de viscosité, de transport par le champ turbulent et de pression. On remarque de plus deux termes sources. Le premier fait intervenir de manière explicite le tenseur de Reynolds et on peut y reconnaître un terme d'injection d'énergie dans le champ turbulent. Remarquons que ce terme est relié au transport du champ de vitesse moyenné par le champ turbulent dans l'équation du mouvement. Le second terme est un terme de perte visqueuse. On pourra notamment vérifier que ce terme est toujours négatif en utilisant l'expression exacte de  $\sigma'_{ij}$ .

Si l'on suppose alors que l'énergie moyennée sur la boîte est globalement stationnaire, on comprend que le terme d'injection d'énergie doit être égal au terme de dissipation. Dans ce cas, on peut justifier l'approximation de Boussinesq en considérant qu'aux grandes échelles, le terme de transport permet d'injecter de l'énergie dans la cascade turbulente qui est ensuite dissipée aux petites échelles. Ceci permet de voir le terme de transport comme une « viscosité apparente » aux grandes échelles.

### § 41.3. *Modèle spectral, mécanisme d'auto-entretien*

Le modèle que je propose ici est le modèle que nous avons utilisé dans Lesur & Longaretti (2005) et qui a été initialement développé par Longaretti (2002) pour expliquer les transitions observées dans les écoulements de Couette-Taylor. Je ne développerai ici que les grandes lignes du modèle et on pourra se reporter aux articles cités pour plus de détails.

Pour simplifier, considérons un fluide dont le cisaillement moyen est constant de sorte que l'on puisse écrire pour une direction arbitraire :

$$\partial_y \overline{V_x} = S \quad (41.160)$$

On peut alors écrire en utilisant (41.157)

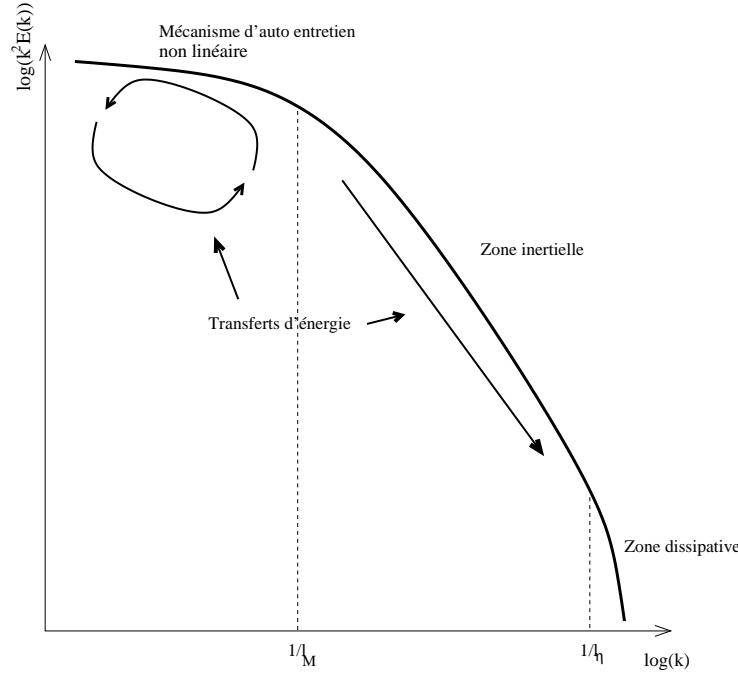
$$\overline{v'_x v'_y} = \nu_t S \quad (41.161)$$

Cette égalité peut être écrite de manière générale sans faire référence à (41.157) par des considérations de dimensionalité. Le coefficient de viscosité turbulente sera alors variable. Si on considère un écoulement d'une taille typique  $L$  (par exemple distance entre les murs dans un écoulement de Couette plan, hauteur dans un disque d'accrétion), des considérations de dimensions sur  $\nu_t$  impliquent :

$$\nu_t = \alpha S L^2 \quad (41.162)$$

où  $\alpha$  est un paramètre sans dimensions du problème. Ce dernier dépend à priori de tous les nombres sans dimension du problème, des conditions aux limites, etc. Cependant, une analyse phénoménologique va nous permettre de préciser cette dépendance.

Tout d'abord, remarquons qu'un écoulement cisailé est naturellement hors équilibre thermodynamique : il cherche alors à annuler le gradient de vitesse par transport de quantité



**FIG. 38.** Représentation schématique du spectre d'un écoulement turbulent dû à une instabilité sous-critique. L'instabilité sous-critique induit un couplage non linéaire qui injecte de l'énergie à grande échelle ( $l > l_M$ ). On a alors une cascade turbulente jusqu'aux petites échelles ( $l \sim l_\eta$ ) où l'on observe une dissipation visqueuse.

de mouvement. Pour un écoulement sous-critique, il existe *a priori* deux possibilités pour ce transport : le transport visqueux via le tenseur des contraintes, ou le transport turbulent avec le tenseur de Reynolds. Le fluide adoptera alors naturellement la méthode de transport la plus efficace. Lorsque le fluide transite d'un état turbulent à un état laminaire en variant un nombre sans dimension, on pourra alors écrire :

$$\langle \sigma'_{ij} \rangle_g \simeq \langle \overline{v'_x v'_y} \rangle_g \quad (41.163)$$

où l'indice  $g$  signifie que les moyennes de volume  $\langle \rangle$  sont prises au voisinage d'une transition. Compte tenu de (41.161) et (41.162), on peut alors réécrire l'équation précédente sous forme adimensionnelle :

$$\alpha_g \sim \frac{\nu}{SL^2} \sim \frac{1}{Rg} \quad (41.164)$$

où  $Rg$  est le Reynolds de transition sous-critique défini au § 39.2. Pour décrire l'évolution de  $\alpha$  lorsque  $Re > Rg$ , il convient d'avoir une vision schématique du fonctionnement d'une instabilité sous-critique d'un point de vue spectral (Fig. 38). Remarquons tout d'abord qu'une instabilité sous-critique fait appel à des processus non linéaires de couplage entre différents modes linéaires de l'écoulement. Le mécanisme d'auto-entretien aura donc une certaine largeur spectrale. De plus, on s'attend à ce que la plus grande échelle du mécanisme soit du même ordre de grandeur que l'échelle de l'écoulement. Ainsi, le mécanisme d'auto-entretien doit se trouver dans une gamme d'échelle allant de la taille de l'écoulement  $L$  jusqu'à la plus petite échelle du mécanisme  $l_M$ . Dans la suite du spectre, on observe alors une cascade turbulente type Kolmogorov, qui peut éventuellement être anisotrope aux plus grandes échelles (non représenté sur la figure). On comprend alors avec ce schéma qu'il est nécessaire de résoudre toutes les échelles jusqu'à

l'échelle  $l_M$  pour obtenir l'instabilité. Ceci explique le Reynolds critique  $R_g$  plus élevé pour les instabilités sous-critiques (quelques milliers) que pour les instabilités super-critiques (quelques dizaines), pour lesquelles il suffit que le mode le plus grand soit instable. Cependant, dès lors que ce seuil est atteint, on s'attend à ce qu'une augmentation du Reynolds n'augmente *que* la longueur de la cascade turbulente sans modifier le mécanisme et donc sans modifier le taux d'injection et le transport turbulent. Ce qui nous permet dès lors d'écrire :

$$\alpha \simeq \alpha_g \quad \text{si} \quad Re > R_g \quad (41.165)$$

cette égalité étant vraie tous nombres sans dimensions autres que  $Re$  constants. Notons que ces arguments phénoménologiques sont appuyés par des résultats expérimentaux et numériques. Ainsi, on pourra remarquer dans la figure (14) de Dubrulle *et al.* (2005a) que le couple évolue comme  $Re^2$  dès que  $Re > R_g$  pour une instabilité sous-critique dans un écoulement de Couette Taylor, ce qui correspond à  $\alpha \simeq \text{cte}$  dans les notations utilisées ici. D'autre part, je montrerai dans la suite que les résultats numériques exhibent un transport (et donc une injection dans la cascade turbulente) essentiellement à grande échelle, même à haut Reynolds, ce qui est conforme à la description de l'instabilité présentée ici. Ainsi, on peut conclure de ce schéma de principe que :

- Au seuil d'instabilité sous-critique, le transport turbulent est du même ordre de grandeur que le transport visqueux.
- Le transport turbulent n'évolue pas lorsque l'on fait évoluer *uniquement* le nombre de Reynolds dans la région  $Re > R_g$ .

Comme nous le verrons, ces deux points auront une importance décisive pour conclure sur le rôle de l'instabilité sous-critique hydrodynamique dans les disques d'accrétion.

## 2. Exemple d'instabilité sous-critique : l'écoulement de Couette

### § 42. Présentation

L'écoulement de Couette est composé de deux murs allant dans des directions opposées, ce qui engendre un cisaillement moyen au travers de l'écoulement (voir Fig. 39). Un tel écoulement est stable linéairement. Cependant, il apparaît à la fois expérimentalement (Daviaud *et al.* 1992; Dauchot & Daviaud 1995a,b), numériquement (Hamilton *et al.* 1995) et analytiquement (Waleffe 1997) que ces écoulements sont sujets à des instabilités sous-critiques.

Ce prototype est intéressant en prélude à l'étude des disques. En effet, ces derniers constituent une extension des écoulements de Couette auxquels on rajoute une rotation et des conditions aux limites radiales (axe  $y$ ) différentes. Je propose donc dans cette partie une reproduction numérique des travaux de Hamilton *et al.* (1995) effectuée durant ma thèse avec le code aux différences finies que j'ai développé. Ces résultats ont été confirmés avec des simulations analogues sur le code Zeus3D. On remarquera aussi que l'étude de cette instabilité non linéaire peut-être considérée comme un cas test pour mon code différences finies.

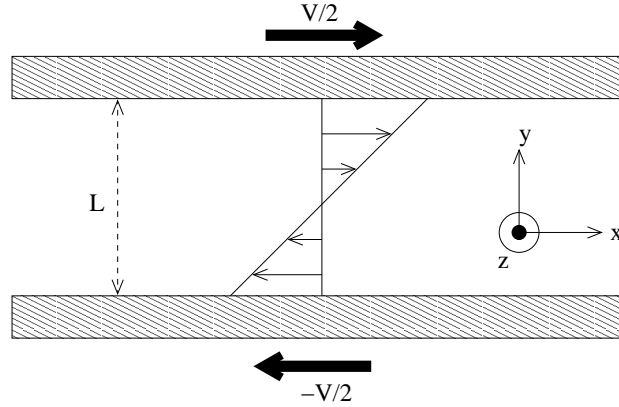


FIG. 39. Schéma de principe d'un écoulement de Couette plan.

### § 43. Mécanisme d'auto-entretien dans l'écoulement de Couette plan

#### § 43.1. Paramètres

Les simulations présentées dans cette partie ont été effectuées dans une boîte ayant pour dimensions :  $L_x = 2.75$ ,  $L_y = 1$ ,  $L_z = 1.96$  avec un Reynolds  $Re = VL_y/\nu = 1600$ . Le Reynolds choisit correspond au Reynolds de transition expérimental. De plus la taille de boîte correspond à la taille de boîte minimale dans laquelle on peut isoler le mécanisme d'auto-entretien (Hamilton *et al.* 1995). En pratique, cette taille de boîte s'obtient par essais successifs en s'efforçant de maintenir la turbulence pour un Reynolds le plus bas possible.

Les conditions aux limites en  $x$  et  $z$  sont des conditions aux limites périodiques. Dans la direction  $y$  des conditions aux limites type mur imperméable sont utilisées. Enfin, la résolution utilisée est de 64 points de grille dans chaque direction.

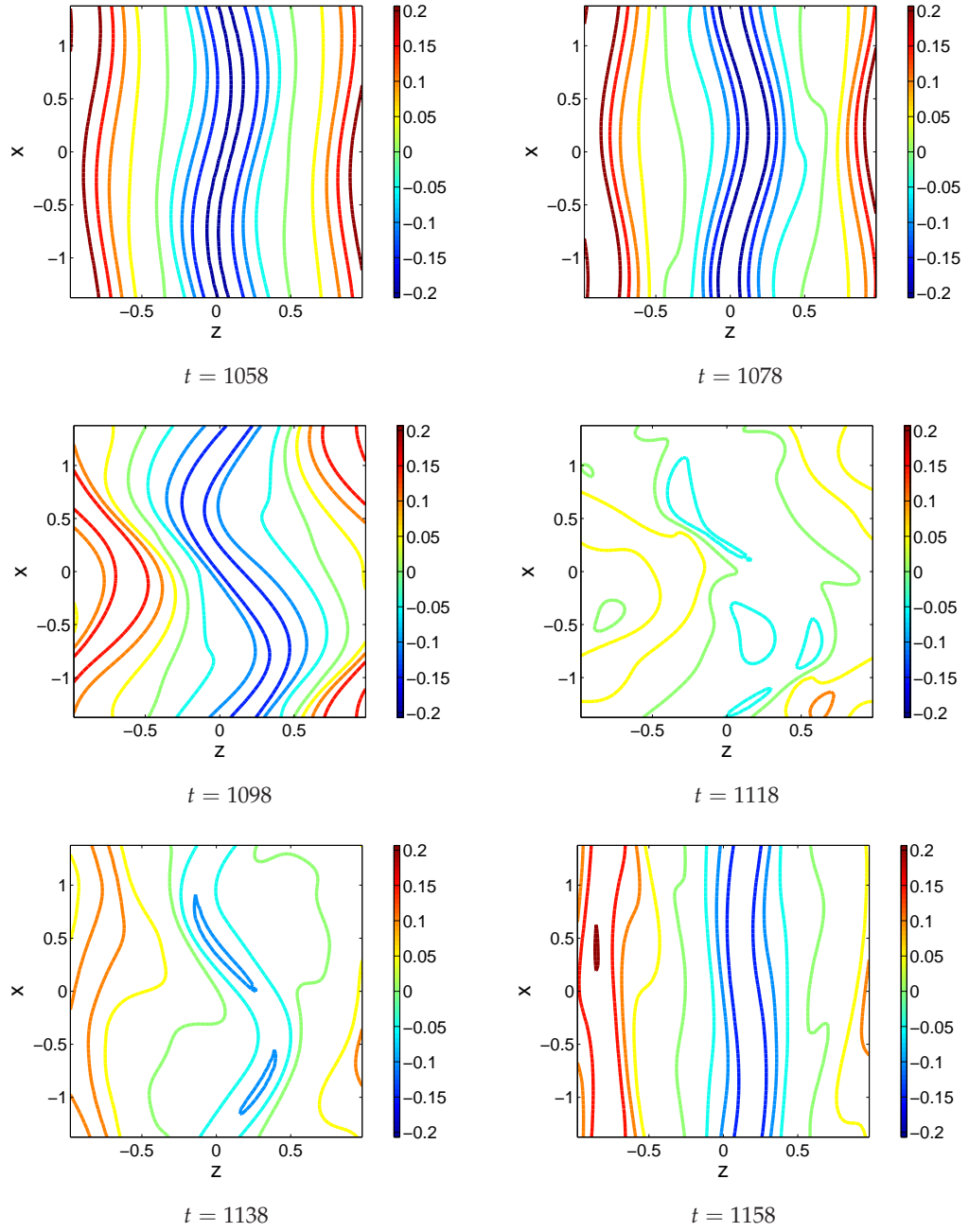
#### § 43.2. Mise en évidence du cycle d'auto-entretien

Le mécanisme mis en jeu dans l'instabilité sous-critique de l'écoulement de Couette est un cycle qui est aujourd'hui bien compris. Dans les expériences et dans les simulations effectuées sur ces écoulements, la première structure à avoir été mise en évidence est une structure de stries, formée par le champ  $v'_x$  dans le plan  $(x, z)$ . On peut observer ces structures sur la série d'instantanés de la figure (40). Ces structures sont en fait le résultat d'un processus d'advection du cisaillement moyen par le champ  $v'_y$  (Fig. 41). En particulier, on pourra remarquer la présence de rouleaux dans la direction de l'écoulement, qui engendrent l'advection de  $\overline{V}_x$ . Le terme mis en jeu par ce processus dans l'équation de Navier-Stokes est donc de la forme :

$$\partial_t v'_x = -v'_y \partial_y \overline{V}_x = -S v'_y \quad (43.166)$$

Outre le fait que ce terme est linéaire, on pourra y reconnaître la source du terme d'injection d'énergie turbulente dans l'équation (41.159). Ainsi, la formation des stries est un processus purement linéaire, source d'énergie turbulente.

L'analyse de l'évolution des stries sur la figure (40) met en évidence la destruction de ces structures par un processus d'instabilité. On peut montrer (Hamilton *et al.* 1995) que l'instabilité des stries est linéaire (on peut les assimiler au premier ordre à une instabilité de

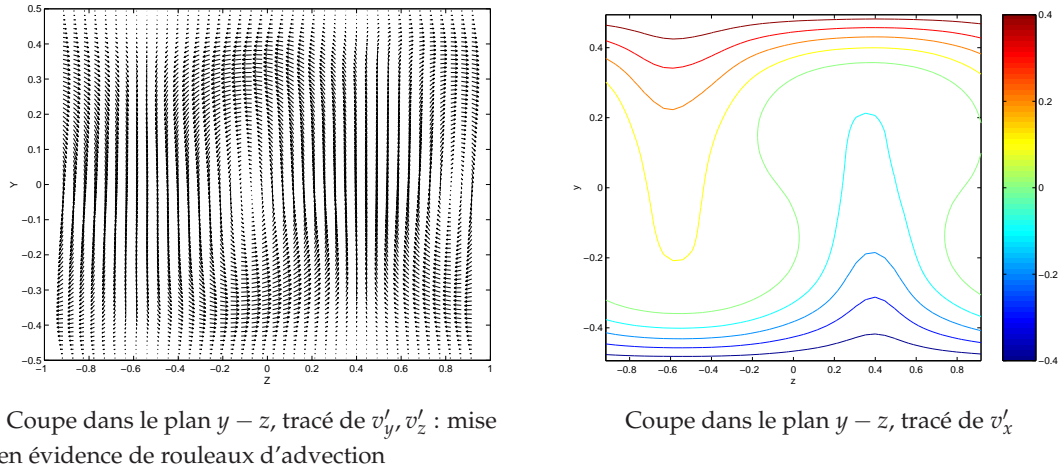


**FIG. 40.** Mise en évidence de stries longitudinales en  $v'_x$  dans le plan médian  $x - z$  de l'écoulement. On voit qu'au cours d'un cycle, la strie est rompue par une instabilité ( $t = 1118$ ). En fin de cycle néanmoins, on observe une réapparition de la structure et le processus est prêt à recommencer.

Kelvin Helmholtz). Cette instabilité est mise en évidence en effectuant une étude spectrale de l'écoulement.

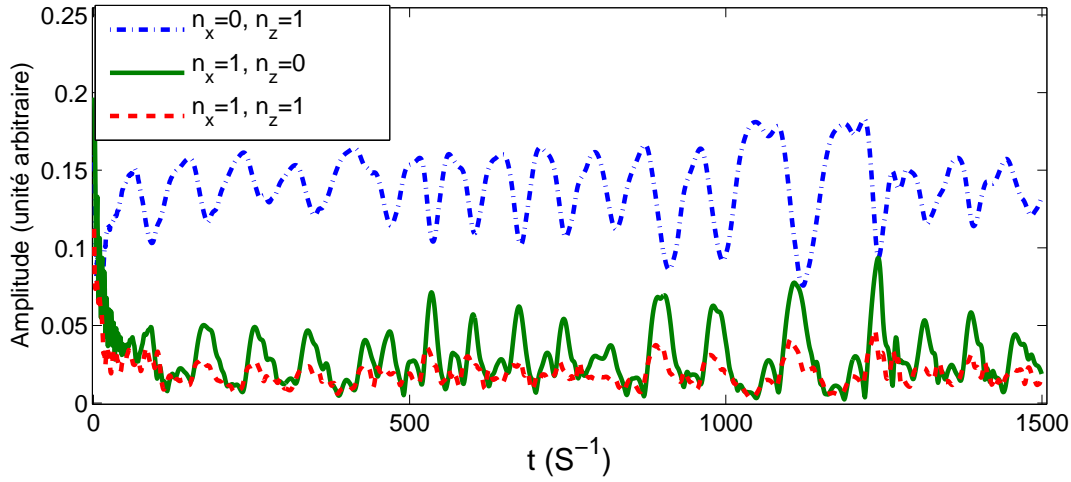
Ainsi, on calcule l'évolution de la puissance spectrale dans chacun des modes  $(\alpha, \beta)$  définis par :

$$P(n_x, n_z) = \int_{-L_y/2}^{L_y/2} dy |\partial'_x(n_x \alpha, y, n_z \beta)|^2 + |\partial'_y(n_x \alpha, y, n_z \beta)|^2 + |\partial'_z(n_x \alpha, y, n_z \beta)|^2 \quad (43.167)$$



**FIG. 41.** Mécanisme de formation des stries en  $v'_x$  par advection du champ moyen.

où  $\hat{v}'_i(n_x\alpha, y, n_z\alpha)$  est la transformée de Fourier de  $v_i$  sur les coordonnées  $x$  et  $z$ . On a noté  $k_x = n_x\alpha$  et  $k_z = n_z\beta$  du fait des conditions aux limites périodiques imposées dans les directions  $x$  et  $z$ .

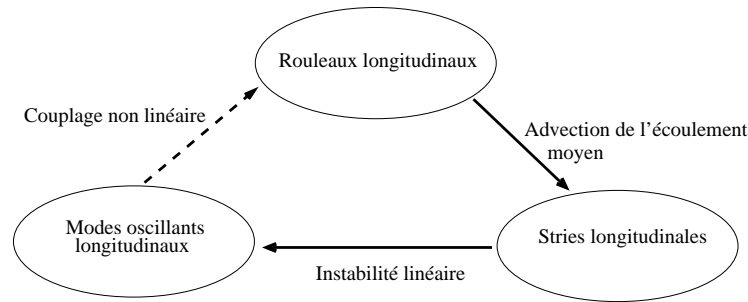


**FIG. 42.** Évolution de l'amplitude des modes les plus grands dans un écoulement de Couette Plan. L'énergie des modes de strie ( $n_x = 0, n_z = 1$ ) est transférée vers les modes  $n_x \neq 0$ .

Cette décomposition spectrale permet de tracer l'évolution de la puissance spectrale  $P$  de chacun des modes en fonction du temps (Fig. 42). En particulier, on remarquera que les stries observées sur la figure (40) correspondent au mode  $n_x = 0, n_z = 1$ . Ce graphique met en avant un transfert énergétique du mode  $n_x = 0, n_z = 1$  vers les modes  $n_x \neq 0$ , ce qui est conforme à l'observation d'une instabilité de strie. Par ailleurs, la figure (42) met en évidence la périodicité assez régulière du mécanisme avec  $T \simeq 100S^{-1}$ .

La dernière partie du processus mis en jeu dans le mécanisme d'auto-entretien est un couplage entre les modes  $n_x \neq 0$  et les rouleaux de la figure (41). En particulier on peut montrer que les interactions *non linéaires* entre ces modes donnent lieu à la formation d'un mode de





**FIG. 43.** Diagramme du mécanisme d'auto-entretien responsable de l'instabilité sous-critique dans les écoulements de Couette plan. Sont notés en trait pleins les phénomènes linéaires et en pointillés les interactions non linéaires.

vorticité  $n_x = 0$  qui correspond à l'excitation des rouleaux. On pourra remarquer qu'il s'agit là du seul processus non linéaire mis en jeu dans cette instabilité sous-critique, ce qui permet de la qualifier de « quasi linéaire ». Pour résumer, on trouvera un schéma récapitulatif du mécanisme d'auto-entretien de cette instabilité sur la figure (43).

On aura pu remarquer dans ce chapitre que la description de cette instabilité sous-critique semble particulièrement simple. Cependant, il aura fallu de nombreux travaux expérimentaux, théoriques et numériques afin d'aboutir à cette description synthétique. Compte tenu du temps qui nous est imparti, nous ne pouvons pas effectuer une démarche similaire à celle de Hamilton *et al.* (1995) pour les écoulements de Couette en rotation. Néanmoins, la description présentée ici peut donner de bonnes pistes pour expliquer qualitativement les résultats présentés dans les chapitres suivants.





# Instabilité sous-critique dans les disques d'accrétion

## Plan du chapitre

1. Turbulence sous-critique dans les disques : pourquoi faire? .....	89
2. Écoulements expérimentaux.....	90
§ 44. Intérêt des expériences.....	90
§ 45. Écoulements de Couette-Taylor.....	90
§ 46. Équations du mouvement.....	91
§ 47. Quantités caractéristiques.....	92
§ 48. Nombres sans dimension.....	92
§ 49. Stabilité linéaire.....	93
3. Résultats.....	94
§ 50. Résultats expérimentaux.....	94
§ 50.1. Rôle de la courbure.....	95
§ 50.2. Rôle de la rotation.....	96
§ 50.3. Conclusion sur les expériences.....	97
§ 51. Résultats numériques.....	98
4. Conclusion.....	100

## 1. Turbulence sous-critique dans les disques : pourquoi faire?

COMME JE L'AI MONTRÉ DANS LA PREMIÈRE PARTIE de ce manuscrit, la turbulence est un phénomène plausible pour expliquer le transport dans les disques d'accrétion. Cependant, les conditions physiques régnant dans ces derniers dépendent de la nature du disque : disque de noyau actif et disque d'étoile jeune n'ont clairement pas les mêmes températures, dimensions, densités, *etc.*

Une instabilité linéaire bien connue dans les disques d'accrétion est l'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI), mise en évidence dans les disques par Balbus & Hawley (1991a). Elle a été abondamment (bien qu'incomplètement !) étudiée dans la littérature depuis et semble extrêmement prometteuse. Cette instabilité « à tout faire » nécessite néanmoins la présence d'un ingrédient de taille : le couplage du gaz du disque avec un champ magnétique, ce dernier

pouvant être auto-généré par un processus de dynamo ou bien provenir d'une source extérieure au disque. L'existence de ce couplage dans les disques dépend essentiellement de la fraction d'ionisation du gaz via la résistivité du milieu (Gammie 1996), et donc de leur température et de leur densité, les disques froids et denses étant les moins propices au couplage. On peut ainsi voir apparaître dans les disques d'étoiles jeunes (les plus froids) des « zones mortes » ou *dead zones* dans lesquelles le couplage avec le champ magnétique n'est pas suffisant pour l'existence d'une instabilité de type magnétohydrodynamique (Gammie 1996; Fleming & Stone 2003). Notons cependant que l'extension et le positionnement de ces zones mortes dans les disques restent sujet à controverses car ils dépendent de paramètres tels que l'opacité et la composition du disque, difficiles à obtenir.

Ainsi, au moins pour expliquer le transport dans ces zones magnétiquement non couplées, il est nécessaire de trouver une explication alternative à la MRI. On peut ainsi envisager une instabilité d'origine purement hydrodynamique dans les disques, ce qui est l'objet de la présente partie. En poursuivant la logique d'approche progressive présentée dans la première partie de ce manuscrit, je me concentrerai ici sur l'écoulement le plus simple représentant un disque, en ne faisant intervenir que la rotation et le cisaillement dans l'écoulement local présenté au § 9 (p. 22). Je négligerai donc dans toute cette partie les propriétés de stratification et magnétisation.

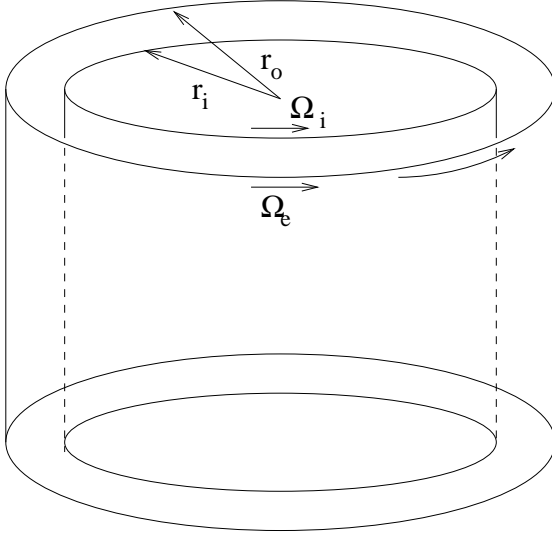
## 2. Écoulements expérimentaux

### § 44. Intérêt des expériences

Les expériences que je vais discuter ici ne sont pas récentes (certaines ont plus de 70 ans) et on peut légitimement se demander quelle est la place de ces résultats dans ce manuscrit. Tout d'abord, il faut se rappeler que la controverse sur l'existence d'une instabilité sous-critique a débuté dans les années 70 avec l'article fondateur de Shakura & Sunyaev (1973). Les moyens numériques limités de l'époque ne permettant pas d'effectuer de simulation d'une telle instabilité, les seuls arguments disponibles étaient basés sur des résultats d'expériences. Aussi, pour être aussi complet que possible, je présente ici des résultats expérimentaux, dont la plupart proviennent d'une réinterprétation de Longaretti (2002) en terme de nombres sans dimension.

### § 45. Écoulements de Couette-Taylor

Dans une expérience cherchant à montrer une instabilité sous-critique dans un disque, il faut réaliser un écoulement voisin de l'écoulement prototype (Fig. 9, p. 24) présenté en introduction. On négligera en particulier les effets magnétiques et la stratification verticale. Remarquons cependant que le forçage en volume de la gravitation qui impose le cisaillement dans un disque ne peut être directement reproduit en laboratoire. On doit donc se contenter d'introduire des murs dans la direction  $y$ , et de provoquer le cisaillement via ces murs : c'est l'écoulement de Couette plan tournant. Malheureusement, en pratique, des murs en translation rectiligne sont difficiles à réaliser. Aussi, on préfère souvent utiliser l'écoulement de Couette-Taylor (Fig. 44), composé de deux cylindres verticaux en rotation. On notera cependant que les conditions aux limites verticales, non représentées sur la figure, restent problématiques expérimentalement.



**FIG. 44.** Écoulement de Couette-Taylor : le fluide est entraîné entre 2 cylindres en rotation différentielle. Expérimentalement, les conditions aux limites verticales (non représentées ici) sont souvent problématiques.

### § 46. Équations du mouvement

Pour détailler les nombres sans dimension pertinents dans le problème de l'écoulement de Couette-Taylor, nous allons commencer par développer les équations du mouvement dans un repère tournant. On considère donc un écoulement de type Couette-Taylor dans le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ ,  $z$  étant l'axe des cylindres. On définit alors  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \tilde{\Omega} r \mathbf{e}_\phi$  où  $\tilde{\Omega}$  est une vitesse de rotation moyenne (constante) de l'écoulement qui sera définie plus précisément par la suite. De même, on pose  $\phi = \theta - \tilde{\Omega} t$ . Ceci nous permet de définir le repère  $(r, \phi, z)$  en corotation locale avec le fluide dont le champ de vitesse est donné par  $(w_r, w_\phi, w_z)$ . Dans ce repère, l'équation de Navier-Stokes devient (Longaretti 2002) :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla' \mathbf{v} + 2\tilde{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{v_\phi^2}{r} \mathbf{e}_r + \frac{v_\phi v_r}{r} \mathbf{e}_\phi = -\frac{\nabla \pi}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{w} \quad (46.168)$$

On inclut à présent le terme de force centrifuge  $-\rho \tilde{\Omega}^2 r^2 / 2$  dans le terme de pression généralisée  $\pi$ . Par ailleurs, on définit le terme « advection-cisaillement » par :

$$\mathbf{a} \cdot \nabla' \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \nabla (b_r \mathbf{e}_r) + [r \mathbf{a} \cdot \nabla (b_\phi / r)] \mathbf{e}_\phi + \mathbf{a} \cdot \nabla (b_z \mathbf{e}_z) \quad (46.169)$$

Cette définition permet de séparer les contributions dues à la courbure de l'écoulement moyen [deux derniers termes de l'équation (46.168)] et au cisaillement. On pourra remarquer que dans la définition précédente, l'annulation du cisaillement, et donc du tenseur des contraintes induit l'annulation du terme d'advection-cisaillement, et permet ainsi de séparer nettement le rôle du cisaillement et le rôle de la courbure.

Dans le cas d'un écoulement de Couette plan tournant, on obtient l'équation du mouvement en faisant tendre  $r$  vers l'infini dans (46.168) :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{\nabla \pi}{\rho} - 2\tilde{\Omega} \times \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (46.170)$$

Le système de coordonnées cylindriques devient par cette limite un système cartésien et le terme d'advection se réduit au terme d'advection cartésien classique.

### § 47. Quantités caractéristiques

Plusieurs échelles caractéristiques du problème de l'écoulement de Couette-Taylor doivent être définies pour pouvoir comparer les différentes expériences. Ainsi, on pose  $\tilde{\Omega}$  de tel sorte que :

$$r_e \Omega_e - r_e \tilde{\Omega} = r_i \tilde{\Omega} - r_i \Omega_i \quad (47.171)$$

où les indices  $i, e$  se réfèrent respectivement aux quantités des cylindres intérieur et extérieur respectivement. En posant le rayon caractéristique comme étant :

$$\tilde{r} = (r_e r_i)^{1/2} \quad (47.172)$$

on obtient la propriété suivante dans la limite des faibles écartements ( $r_i \gg d$  où  $d = r_e - r_i$ ) :

$$\tilde{\Omega} = \bar{\Omega}(\tilde{r}) \simeq \frac{r_e \Omega_e + r_i \Omega_i}{2\tilde{r}} \quad (47.173)$$

où  $\bar{\Omega}(r)$  est le profil de rotation en régime laminaire. De la même manière, on définit le cisaillement moyen par :

$$\tilde{S} = \bar{S}(\tilde{r}) = 2 \frac{r_e r_i}{r_e + r_i} \frac{|\Delta\Omega|}{d} \simeq \tilde{r} \frac{|\Delta\Omega|}{d} \quad (47.174)$$

où  $\bar{S}(r) = r d \bar{\Omega} / dr$  est le cisaillement en régime laminaire et  $\Delta\Omega$  est la différence de vitesse de rotation entre les cylindres extérieur et intérieur.

Dans le cas des écoulements de Couette plan, les expressions ci-dessus se réduisent à :

$$\tilde{\Omega} = -\Omega \quad (47.175)$$

et à :

$$\tilde{S} = \bar{S} = \frac{d\bar{u}_x}{dy} \quad (47.176)$$

Cette définition de la rotation permet d'obtenir une définition cohérente du signe de  $\Omega$  lors du passage à la limite cartésienne.

### § 48. Nombres sans dimension

L'utilisation de nombres sans dimension permet de trouver les paramètres pertinents pour l'étude de la plupart des problèmes en mécanique des fluides. Ici, en partant des équations précédentes, je vais montrer l'existence de trois nombres d'importance capitale pour la compréhension des expériences.

Les écoulements de Couette-Taylor possèdent plusieurs échelles spatiales caractéristiques : le rayon typique d'un cylindre  $r$ , qui correspond à l'échelle des termes de courbure ; la distance  $d$  séparant les 2 cylindres, qui donne l'échelle caractéristique du cisaillement ; une vitesse caractéristique du fluide donnée par la vitesse de cisaillement<sup>14</sup>, soit  $\tilde{w} = \tilde{S}d$  ; et enfin une échelle de temps caractéristique de la rotation :  $\tilde{\Omega}$ .

Toutes ces grandeurs caractéristiques peuvent être combinées pour former des temps caractéristiques de chacun des phénomènes représentés dans l'équation de Navier-Stokes. Ainsi, on peut obtenir un temps de courbure  $t_c = \tilde{r}/\tilde{v} = (\Delta\Omega)^{-1}$ , un temps de cisaillement  $t_s = (\tilde{S})^{-1}$ , un temps de rotation  $t_r = (2\tilde{\Omega})^{-1}$  et un temps de dissipation  $t_d = d^2/\nu$ .

<sup>14</sup>Ce choix est justifié par le fait que tous les phénomènes physiques qui peuvent se produire tireront leur énergie du cisaillement et non de leur vitesse angulaire. Ils auront donc une vitesse caractéristique de l'ordre de la vitesse de cisaillement.

La comparaison de ces différents temps caractéristiques nous permet de définir des nombres sans dimension permettant d'isoler chacun des termes de l'équation de Navier-Stokes :

- Le nombre de Reynolds que l'on a déjà défini précédemment :

$$Re = \frac{\text{advection-cisaillement}}{\text{dissipation visqueuse}} = \frac{\tilde{v}\tilde{S}}{\nu\tilde{v}/d^2} = \frac{\tilde{S}d^2}{\nu} \simeq \frac{\tilde{r}|\Delta\Omega|d}{\nu} \quad (48.177)$$

- Le nombre de rotation, qui est l'inverse d'un nombre de Rossby :

$$R_\Omega = \frac{\text{Coriolis}}{\text{advection-cisaillement}} = \frac{2\tilde{\Omega}}{\tilde{S}} \simeq \frac{2\tilde{\Omega}}{\tilde{r}} \frac{d}{\Delta\Omega} \quad (48.178)$$

On parlera alors de rotation cyclonique lorsque  $R_\Omega > 0$  (la vorticité due au cisaillement et la rotation sont de même signe) et de rotation anticyclonique lorsque  $R_\Omega < 0$  (vorticité et cisaillement sont de signe contraire). On remarquera aussi que dans le cas d'un écoulement à profil képlerien,  $R_\Omega = -4/3$ .

- Enfin, le nombre de courbure :

$$R_c = \frac{\text{Courbure}}{\text{advection-cisaillement}} = \frac{\tilde{v}^2/\tilde{r}}{\tilde{v}^2\tilde{d}} = \frac{d}{\tilde{r}} \quad (48.179)$$

On peut alors adimensionnaliser l'équation de Navier-Stokes en choisissant comme échelle de temps  $\tilde{S}^{-1}$  et comme échelle de longueur  $d$ . Ainsi, en utilisant les nombres sans dimension ci-dessus et en posant  $X^*$  la grandeur adimensionnalisée correspondant à  $X$ , on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla' \mathbf{v}^* + R_\Omega (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}^*) + R_c \left( -\frac{v_\phi^{*2}}{r^*/\tilde{r}^*} \mathbf{e}_r + \frac{v_\phi^* v_r^*}{r^*/\tilde{r}^*} \mathbf{e}_\phi \right) = - \left( \frac{\nabla^* \pi}{\rho} \right)^* + Re^{-1} \Delta^* \mathbf{v}^* \quad (48.180)$$

On voit alors immédiatement que l'écoulement de Couette plan tournant correspond à la même équation avec  $R_c \rightarrow 0$ , au changement de système de coordonnées près.

## § 49. Stabilité linéaire

Les limites de stabilité peuvent être définies à partir de paramètres locaux de rotation. Dans le cas de l'écoulement de Couette-Taylor, on notera :

$$\bar{\Gamma}_\Omega(r) = \frac{2\bar{\Omega}(r)}{rd\bar{\Omega}/dr} \quad (49.181)$$

On peut remarquer que dans cette définition,  $\bar{\Gamma}_\Omega(\tilde{r}) = R_\Omega$ . Dans la limite du Couette plan, on définit :

$$\bar{\Gamma}_\Omega(r) = -\frac{2\Omega}{d\bar{v}_y/dx} \quad (49.182)$$

Comme  $\Omega$  et  $S$  sont constants dans les écoulements de Couette plan, les nombres  $\bar{\Gamma}_\Omega$  et  $R_\Omega$  sont identiques pour ces écoulements. Par ailleurs, de la même manière que le nombre de rotation, le paramètre local de rotation est positif dans le cas de la rotation cyclonique et négatif dans le cas anticyclonique.

Dans le cas d'un écoulement de Couette plan ou d'un écoulement de Couette-Taylor, on montre qu'une condition suffisante d'instabilité à tout Reynolds est donnée par le critère de Rayleigh :

$$-1 < \bar{\Gamma}_\Omega < 0 \quad (49.183)$$

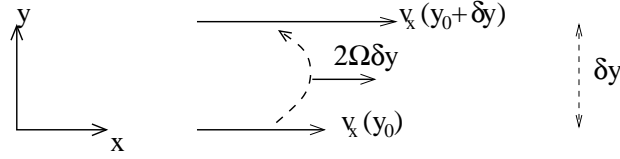


FIG. 45. Effet de la force de Coriolis sur une particule fluide déplacée selon l'axe  $y$ .

qui s'avère être en pratique un critère nécessaire et suffisant d'instabilité.

On peut comprendre cette limite dans l'écoulement de Couette Plan en utilisant un argument de déplacement d'une particule fluide. Le développement que je propose ici est similaire aux travaux de Tritton & Davies (1981) et Tritton (1992). Pour ce faire, considérons un écoulement cisailé en rotation (Fig. 45). L'écoulement moyen est cisailé avec un profil de la forme  $\bar{V} = Sy e_x$ . Ce cisaillement engendre une accélération de Coriolis le long de l'axe  $y$  de la forme  $-2\Omega Sy$ , contrebalancée par un gradient de pression moyen  $d\bar{\pi}/dy$ .

Considérons une colonne de fluide infinie dans la direction  $x$ , centrée en  $y_0$ , et déplaçons la dans la direction  $y$  d'une distance  $\delta y$ . On peut alors supposer que ce déplacement se fait sans variation de pression, ce qui nous permet d'écrire en utilisant l'équation (46.170) :

$$v_x(y_0 + \delta y) - v_x(y_0) = \int dt 2\Omega v_y = 2\Omega \delta y \quad (49.184)$$

La colonne fluide ainsi déplacée subit une accélération de rappel sur l'axe  $y$ , notée  $\delta y''$ , composée de la force de Coriolis et du gradient de pression :

$$\delta y'' = -2\Omega[v_x(y_0 + \delta y)] - \frac{d\pi}{dy}(y_0 + \delta y) \quad (49.185)$$

ce que l'on pourra réduire en utilisant l'équilibre de pression précédent et en remarquant que  $v_x(y_0) = Sy_0$  :

$$\delta y'' = -2\Omega(2\Omega - S)\delta y \quad (49.186)$$

Cette dernière équation met en évidence la fréquence épicyclique  $\kappa^2 = 2\Omega(2\Omega - S)$ . Le système sera donc stable si  $\kappa^2 > 0$ , ce qui correspond à la condition (49.183).

Cette limite a été étudiée du côté cyclonique ( $\bar{\Gamma}_\Omega = 0$ ) et du côté anticyclonique ( $\bar{\Gamma}_\Omega = -1$ ) de manière numérique et expérimentale. Les résultats obtenus sont conformes avec les études théoriques de stabilité linéaire dans ces écoulements.

### 3. Résultats

#### § 50. Résultats expérimentaux

Comme je l'ai montré en introduction, l'approximation disque mince ( $H \ll R$ ) est particulièrement adaptée à la description de la turbulence dans les disques d'accrétion (§ 9, p. 22). Ainsi, on s'attend à ce que la turbulence soit peu anisotrope, de sorte que les longueurs typiques de corrélation dans les trois directions soient voisines de  $H$ . En conséquence, le nombre de courbure typique pour décrire la turbulence des disques est faible (de l'ordre de  $H/R$ ). Aussi, la description d'écoulements expérimentaux au voisinage de  $R_c = 0$  est bien adaptée à la caractérisation astrophysique. Par ailleurs, je rappelle que le profil képlerien donne un nombre de

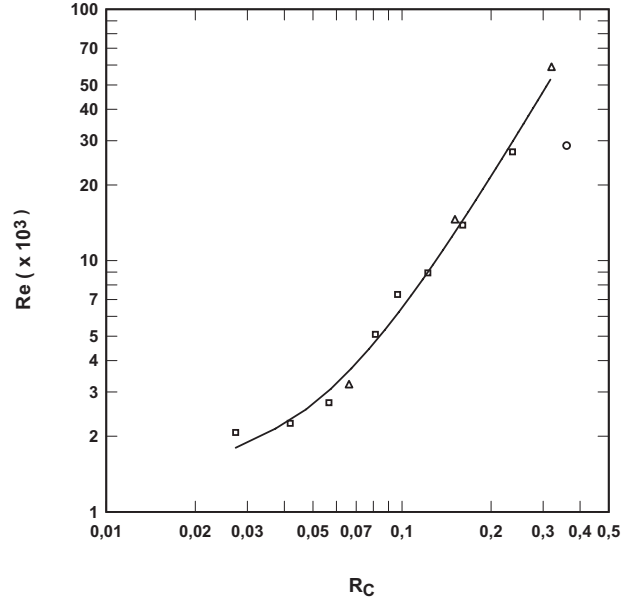


FIG. 46. Reynolds de transition turbulente en fonction du nombre de courbure.

rotation caractéristique de  $-4/3$ . On doit donc s'atteler à décrire la turbulence dans ces régimes d'écoulement.

### § 50.1. Rôle de la courbure

Les données présentées ici ont été obtenues sur des écoulements de type Couette-Taylor du côté cyclonique avec le cylindre intérieur au repos en faisant varier l'écartement présent entre les deux cylindres. Dans ce cas, on a d'après les définitions (48.178) et (48.179)  $R_\Omega = 2R_c$ . Les temps caractéristiques de courbure et de rotation sont en conséquence proches et les effets de courbure et de rotation sont *a priori* indiscernables. On cherche alors à étudier le Reynolds de transition vers la turbulence (noté  $Re_c$  dans la suite). Les résultats obtenus par Taylor (1936) et Wendt (1933) sont donnés sur la figure (46).

Les données du Reynolds critique sont correctement ajustées par une expression du type (Richard & Zahn 1999) :

$$Re_c \simeq R^+ + b^+ \left( \frac{d}{\tilde{r}} \right)^2 \quad (50.187)$$

avec  $R^+ = 1400$  et  $b^+ \simeq 5 \times 10^5$ ,  $R^+$  correspondant au Reynolds critique sans effet de courbure (et de rotation). Le terme  $(d/\tilde{r})^2$  peut alors être soit un effet de courbure soit un effet de rotation. Cependant, on sait que pour les écoulements de Couette plan, la transition vers la turbulence se fait à Reynolds  $\tilde{S}d^2/\nu$  constant. Ici, dans le régime dominé par le terme quadratique, on peut affirmer que la transition turbulente se fait à  $Re^* = \tilde{S}\tilde{r}^2/\nu = (\tilde{r}/d)^2 Re$  constant. En conséquence, la transition n'est plus caractérisée par la distance séparant les deux cylindres mais par le rayon moyen  $\tilde{r}$  pour un cisaillement donné. Comme la rotation ne possède qu'une échelle caractéristique de temps ( $\tilde{\Omega}^{-1}$ ), et que la courbure possède une échelle caractéristique de longueur ( $\tilde{r}$ ), on peut penser que l'effet observé dans ces résultats est un effet dû uniquement à la courbure.



### § 50.2. Rôle de la rotation

De la même manière que pour la courbure, des expériences ont été faites d'une part pour des écoulements de Couette-Taylor par Richard (2001) du côté cyclonique et anticyclonique, et d'autre part pour des écoulements de Couette plan en rotation par Tillmark & Alfredsson (1996), uniquement du côté cyclonique.

- **Écoulement de Couette plan tournant.** Les données de l'expérience de Couette plan en rotation sont représentées<sup>15</sup> sur la figure (47). Le point noir correspond à une simulation de Komminaho *et al.* (1996) pour  $Re = 3000$  et  $R_\Omega = 0.06$ .

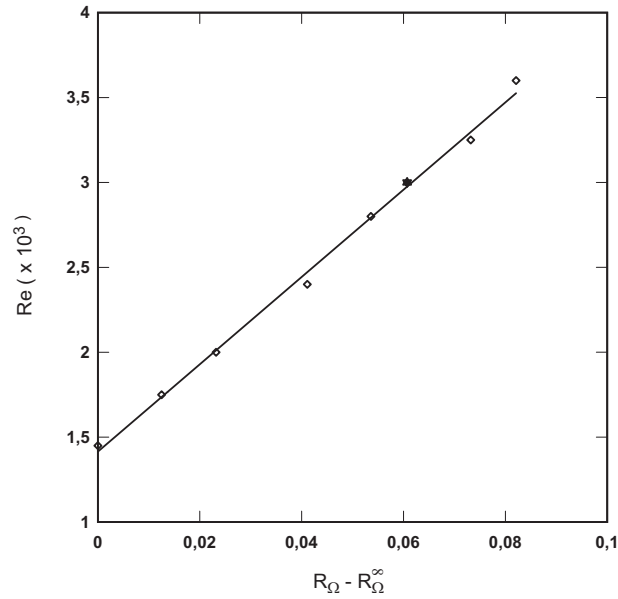


FIG. 47. Reynolds de transition en fonction du nombre de rotation pour un écoulement de Couette plan.

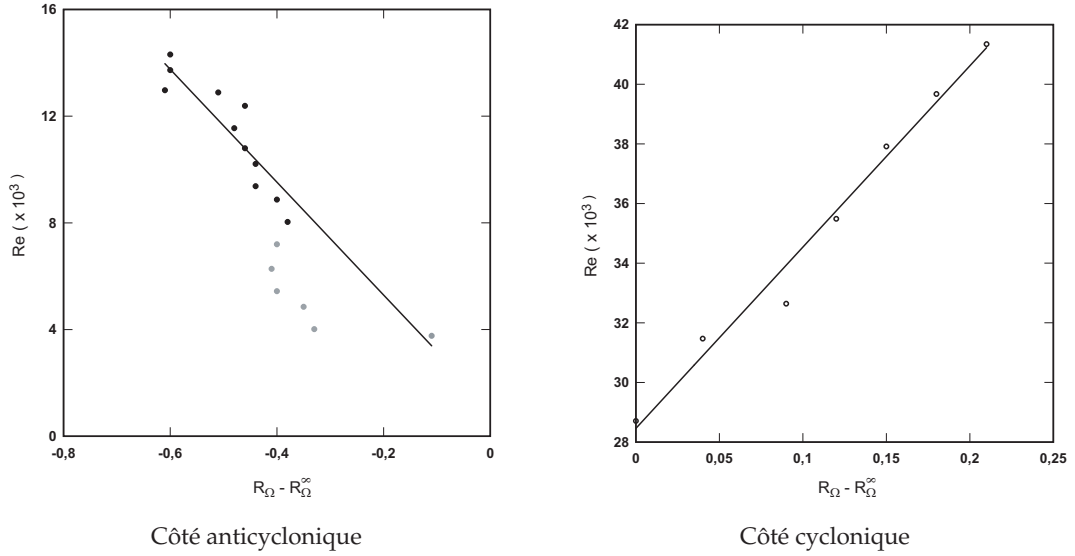
On obtient un ajustement correct avec une équation du type :

$$Re_c = R^+ + a^+ R_\Omega \quad (50.188)$$

où  $R^+ \simeq 1400$  et  $a^+ \simeq 26000$ . Remarquons, d'une part, que la valeur de  $R^+$  est cohérente avec la valeur obtenue pour la courbure. D'autre part, l'équation (50.188) montre que la rotation devient très rapidement le paramètre clé du mécanisme d'auto-entretien. En particulier, la rotation commence à dominer la turbulence lorsque  $R_\Omega = 0,05$  [ $Re_c(R_\Omega = 0,05) \simeq 2R^+$ ]. Ainsi, on peut s'attendre à ce que le temps typique du mécanisme mis en jeu soit de l'ordre de  $\Omega^{-1}$  pour des  $R_\Omega$  supérieurs à  $10^{-1}$ . Ceci contraste avec le mécanisme mis en évidence dans l'écoulement de Couette plan au chapitre précédent, où le temps caractéristique du mécanisme était  $100 S^{-1}$ .

- **Écoulement de Couette-Taylor.** Les données de Richard (2001) sont faites avec un nombre de courbure constant  $R_c = 0,36$ . Elles sont représentées sur la figure (48), les points grisés n'étant pas pris en compte. En effet, compte tenu des difficultés expérimentales du côté anticyclonique (deux cylindres tournants), des circulations à grande échelle se mettent en place et peuvent

<sup>15</sup>Afin d'obtenir des courbes d'instabilité facilement comparables entre les coté cycloniques et anticycloniques, nous avons noté  $R_\Omega^\infty$  le nombre de rotation critique ( $R_\Omega^\infty = 0$  du côté cyclonique et  $R_\Omega^\infty = -1$  du côté anticyclonique).



**FIG. 48.** Reynolds de transition pour un écoulement Couette-Taylor, d'après Richard (2001) et Longaretti (2002).

provoquer localement des instabilités linéaires. Ceci peut expliquer le « plateau » observé sur la figure (48) lorsque  $R_\Omega$  est proche de 1. Le jeu de données du côté cyclonique est ajusté par une expression du type :

$$Re_c = R^+ + b^+ R_c^2 + a^+(R_c) |R_\Omega - R_\Omega^\infty| \quad (50.189)$$

afin d'être cohérent avec l'expression du Reynolds critique en fonction de la courbure (50.187). On trouve  $b^+ = 4.10^5$  et  $a^+(R_c) = 75000$ . On voit donc que la courbure a un rôle non négligeable sur les paramètres de rotation du côté cyclonique. Cependant, il n'est pas certain que les écarts observés ne soient pas dus à des différences de protocole expérimental (le seuil de la turbulence est une notion assez « subjective » expérimentalement dans les écoulements sous-critiques).

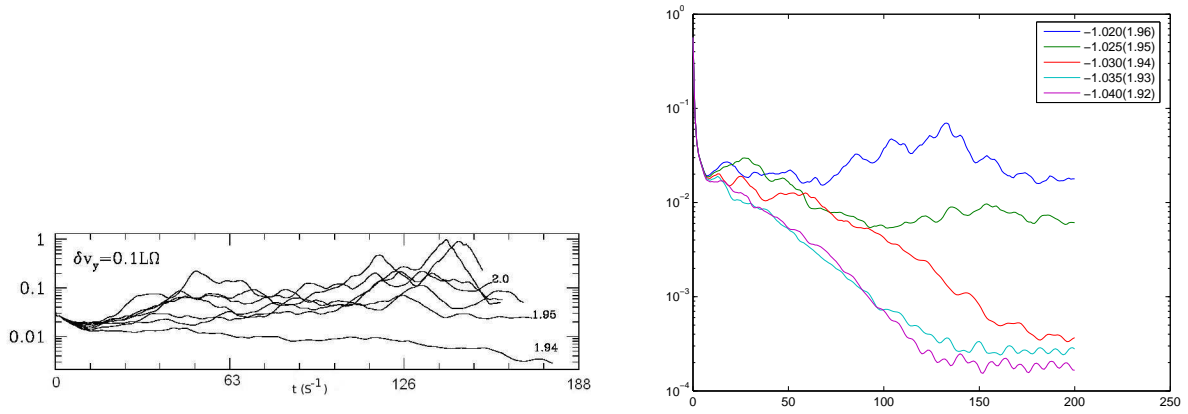
Pour le côté anticyclonique, un ajustement cohérent avec les expressions ci-dessus est de la forme :

$$Re_c = R^- + b^- R_c^2 + a^-(R_c) |R_\Omega - R_\Omega^\infty| \quad (50.190)$$

On trouve  $R^- + b^- R_c^2 = 1300 \simeq R^+$  et  $a^- \simeq 25000 \sim a^+(R_c = 0)$ . Compte tenu de ces résultats, on peut supposer que la courbure a un effet négligeable devant l'effet de rotation, et donc que  $b^- \ll b^+$ . Notons cependant que les résultats anticycloniques semblent beaucoup moins fiables que du côté cyclonique. Ainsi, il semble que ces écoulements soient très sensibles aux effets de circulation d'Ekman causés par les conditions aux limites verticales [plateau de la figure (48)]. D'autres part, des résultats expérimentaux postérieurs à ces travaux ont montré, avec un nombre de courbure plus important, que l'écoulement ne semblait pas instable, et ce jusqu'à  $Re = 10^6$  (Ji *et al.* 2006). Ainsi, il conviendra d'interpréter les résultats expérimentaux du côté anticyclonique avec beaucoup de prudence.

### § 50.3. Conclusion sur les expériences

Tout d'abord, on peut voir que le phénomène de turbulence est très fortement perturbé par la présence de rotation, symétriquement du côté cyclonique et du côté anticyclonique [Figs. (47) et (48)]. De plus, la courbure semble avoir un effet notable sur le mécanisme du côté cyclonique



Résultat original de Hawley et al. (1999)

Reproduction avec notre version de Zeus3D (valeurs de  $q$  entre parenthèses)

**FIG. 49.** Représentation de l'évolution de l'énergie turbulente en fonction du temps pour différentes valeurs de  $R_\Omega = -2/q$ . On voit dans les 2 cas que la turbulence disparaît lorsque l'on s'éloigne de la stabilité marginale  $R_\Omega = -1$  ( $q = -2$ ), dès  $R_\Omega = -1.030$  ( $q = 1.94$ ).

mais est sans effet apparent sur le côté anticyclonique, si l'on en croit les données de Richard (2001).

Du point de vue des expériences décrites ici, la turbulence sous-critique apparaît donc comme une hypothèse plausible (mais non prouvée) pour expliquer la turbulence dans les disques d'accrétion  $R_\Omega = -4/3$ , pour des Reynolds *a priori* peu élevés ( $Rg < 10^3$  pour un disque).

## § 51. Résultats numériques

Numériquement, la plupart des résultats sur la turbulence sous-critique dans les disques sont obtenus en utilisant le modèle local de disque que j'ai présenté au § 9 (p. 22), dans lequel les effets de stratification verticale et de couplage avec le champ magnétique sont négligés. Les conditions aux limites utilisées sont périodiques dans les directions  $x$  et  $z$  et shearing sheet (voir § 25.2, p. 51) dans la direction du cisaillement  $y$ . Ce type de boîte de simulation sera utilisé dans tous les résultats numériques que je discuterai dans cette partie, sauf mention contraire.

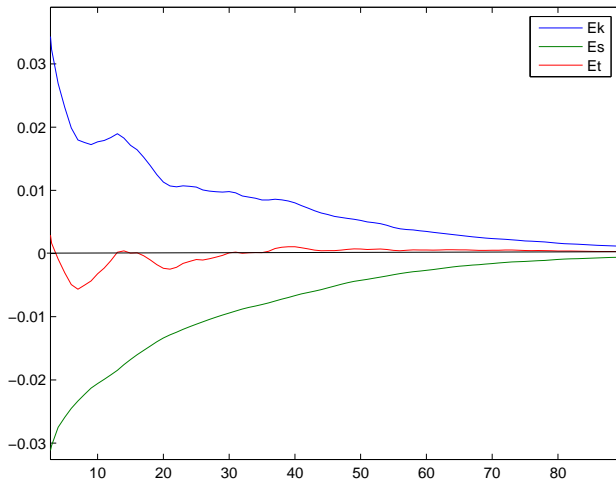
A la suite des travaux numériques de Balbus et al. (1996) puis Hawley et al. (1999), il était couramment admis que la turbulence sous-critique n'existait pas dans les disques. Le principal argument mis en avant était une série de simulations effectuées avec le code Zeus3D. On retrouvera ainsi sur la figure (49), les résultats originaux de Hawley et al. (1999) ainsi qu'une reproduction de ces résultats obtenue avec le code Zeus3D durant ma thèse, pour des résolutions équivalentes.

On voit clairement sur ces figures que la turbulence sous-critique semble très difficile à obtenir dès que l'on cherche à se rapprocher du régime astrophysique  $R_\Omega = -4/3$ , ou de manière équivalente  $q = 1.5$  ( $q \equiv -2/R_\Omega$ ). Cette disparition apparente de turbulence dans les simulations a mené à la conclusion qu'il n'existait pas de turbulence sous-critique dans les

régimes pertinents pour les disques. Cependant, les résultats expérimentaux suggèrent qu'il peut exister une telle turbulence au régime képlerien, pourvu que le Reynolds soit suffisamment élevé.

Dans ce cas de figure, il convient d'envisager les différents biais pouvant apparaître, tant du point de vu expérimental que du point de vu numérique. Pour les biais expérimentaux, on pourra retenir le bruit inhérent à toute manipulation et les effets de circulation d'Ekman dont nous avons parlé précédemment (voir Richard 2001). Numériquement parlant, les simulations citées précédemment ont été effectuées avec des résolutions relativement faibles ( $64^3$ ), et sans maîtrise de la dissipation, ce qui laisse présager un fort impact de la dissipation numérique. Étant donné que techniquement, nous ne pouvons refaire les expériences de Richard, il convient de réviser plus scrupuleusement les résultats numériques.

La dissipation du code Zeus3D dans la plupart des publications est très mal maîtrisée. Pire, il apparaît que cette dernière est dominée par le terme de dissipation artificielle introduit pour tenir compte des effets d'entropie en aval des chocs. La dissipation utilisée est une extension 3D de Von Neumann & Richtmyer (1950) (voir Stone & Norman 1992 pour le détail de l'implémentation). Cette extension n'étant pas tensorielle, elle agit dès lors que l'un des termes de la forme  $\partial_i v_i$  (sans sommation) est négatif. Cet effet peut se voir sur la figure (50), où la totalité de l'énergie cinétique est convertie en énergie thermique via le seul terme de dissipation présent qui est la dissipation artificielle.



**FIG. 50.** Tracé de l'énergie cinétique ( $E_k$ ), l'énergie spécifique ( $E_s$ ) et l'énergie totale en fonction du temps pour  $R_\Omega = -1.035$ . La totalité de l'énergie cinétique est transformée en énergie thermique : c'est l'action du terme de viscosité artificielle.

On pourra ainsi remarquer que le terme de viscosité artificielle 3D basé sur Von Neumann & Richtmyer (1950) est non nul même en cas de mouvement totalement incompressible où  $\nabla \cdot v = 0$ . Il peut alors dissiper les vortex et autres structures caractéristiques de la turbulence incompressible. Une méthode alternative consiste à utiliser la formulation tensorielle de Tscharnuter & Winkler (1979), qui introduit une dissipation dépendant explicitement de la divergence du champ de vitesse. On ne dissipe alors que les termes de compressibilité, ce qui permet de réduire de manière significative la dissipation due à ce terme pour l'instabilité sous-critique, essentiellement incompressible. Cependant, la dissipation due au schéma spatial ne peut-être annulée, et les phénomènes dissipatifs restent dominés par des phénomènes numériques, peu contrôlables, et non physiques.

## 4. Conclusion

A travers ce bref tour d'horizon sur la turbulence sous-critique appliquée aux disques d'accrétion, plusieurs résultats essentiels ont été mis en évidence :

- Les résultats expérimentaux semblent tous montrer de manière cohérente qu'une instabilité sous-critique existe du côté cyclonique, bien que son Reynolds critique augmente rapidement avec la rotation. Ceci va à l'encontre de l'argument analytique avancé par Hawley *et al.* (1999) contre cette instabilité.
- Certains résultats expérimentaux semblent montrer une turbulence sous-critique jusqu'au régime képlerien (Richard 2001), d'autres non (Ji *et al.* 2006). Il apparaît par ailleurs que ces manipulations sont très sensibles aux perturbations (couche d'Ekman).
- Les résultats numériques montrent que l'instabilité disparaît très rapidement lorsque l'on augmente la rotation du côté anticyclonique (Balbus *et al.* 1996; Hawley *et al.* 1999). Cependant, les résolutions sont faibles et aucune dissipation physique n'est introduite (rôle de la dissipation numérique ?).

On le comprend, le contrôle de la dissipation joue un rôle clé dans la compréhension de l'instabilité sous-critique dans les simulations numériques. Dans mon travail de thèse, j'ai donc cherché à comprendre et contrôler le rôle des phénomènes dissipatifs, pour apporter une explication aux résultats apparemment négatifs de Balbus *et al.* (1996) et Hawley *et al.* (1999) et en contradiction avec Richard (2001).

# Efficacité de la turbulence sous-critique

## Plan du chapitre

1. Résultats .....	102
§ 52. Rôle de la dissipation.....	102
§ 52.1. Protocole .....	103
§ 52.2. Résultats cycloniques.....	103
§ 52.3. Résultats anticycloniques.....	105
§ 53. Transport et instabilité non linéaire.....	106
2. Discussion .....	108
§ 54. Convergence numérique.....	108
§ 54.4. Dissipation numérique .....	108
§ 54.5. Spectres et convergence.....	109
§ 54.6. Transport et modèle phénoménologique.....	110
§ 55. Comparaison avec les résultats antérieurs.....	112
§ 55.7. Côté cyclonique.....	112
§ 55.8. Côté anticyclonique .....	112
§ 56. Conditions aux limites et rapport d'aspect.....	114
§ 57. Conditions initiales .....	115
§ 58. Circulation d'Ekman.....	117
3. Conclusions.....	118

LE CHAPITRE PRÉCÉDENT A PERMIS DE METTRE EN ÉVIDENCE une apparente contradiction entre résultats expérimentaux et résultats numériques. Mon objectif a donc été de réexaminer les résultats numériques et de comprendre leur réelle signification physique (et éventuellement les biais numériques). Pour cela, un contrôle plus soigneux des problèmes de convergence a dû être effectué, en utilisant notamment, pour la première fois dans ce type de problème, un code spectral 3D. Je vais donc développer dans ce chapitre mes résultats sur ce problème, dont une partie a été publiée dans Lesur & Longaretti (2005). Notons enfin que l'écoulement que je décris dans ce chapitre est identique à l'écoulement

utilisé par Balbus *et al.* (1996) et Hawley *et al.* (1999) dans leurs simulations (voir § 51, p.98 pour un descriptif complet).

## 1. Résultats

### § 52. Rôle de la dissipation

Contrairement aux simulations précédentes, nous avons voulu introduire une dissipation physique dans nos simulations, et ce à plusieurs fins. Premièrement, il faut noter que les codes spectraux tels que ceux que nous utilisons ont une dissipation numérique naturellement faible. L'absence de dissipation physique entraîne alors l'accumulation d'énergie aux petites échelles, la production de spectres aberrants et rapidement l'explosion de la simulation. Ce phénomène, particulier aux codes spectraux, est en partie contrôlé par la procédure d'antialiasing décrite dans la partie numérique de ce manuscrit. Deuxièmement, le contrôle de la convergence d'une simulation ne peut se faire qu'en introduisant une dissipation physique. Ainsi, une simulation sera considérée comme résolue si l'échelle de dissipation naturelle de l'écoulement est plus grande que la taille d'un pas de grille. Ce type d'analyse est très courant en mécanique des fluides mais malheureusement peu répandu dans la communauté numérique d'astrophysique.

L'introduction du terme de dissipation physique nous donne alors un nouveau paramètre libre par rapport aux simulations antérieures que l'on quantifiera à l'aide du nombre de Reynolds, définit précédemment. Dans la suite, nous maintiendrons constantes les dimensions de la boîte de la simulation, et donc le rapport d'aspect, ainsi que les conditions aux limites. Ainsi, le nombre de rotation  $R_\Omega$  et le nombre de Reynolds sont les seuls paramètres libres du problème.<sup>16</sup> Notre stratégie est alors de définir la région de l'espace des paramètres  $(R_\Omega, Re)$  pour laquelle la turbulence sous-critique est observée.

Remarquons que la transition sous-critique, contrairement à la transition super-critique, n'est pas clairement définie en terme de Reynolds critique et des écarts de près de 50% peuvent être observés entre différentes expériences. Notamment, on peut observer une turbulence auto-entretenu pendant plusieurs centaines de temps dynamiques puis un soudain retour à un état laminaire, le tout étant dépendant des conditions initiales et du nombre de Reynolds. Ce type de phénomène a déjà été étudié analytiquement (Darbyshire & Mullin 1995) et numériquement (Faisst & Eckhardt 2004) dans les écoulements de Poiseuille sous-critique. D'après ces résultats, une transition entre une décroissance rapide et un auto-entretien assez long apparaît pour une gamme de nombres de Reynolds assez étroite, bien que non singulière. On peut donc supposer qu'un tel comportement est applicable pour l'instabilité sous-critique dans les écoulements de Couette plan tournants (ce qui semble vérifié, voir Richard 2001), et on partira de ces résultats pour définir un écoulement instable.

Dans cette étude, on définira donc un écoulement comme turbulent si l'énergie turbulente reste fluctuante et constante en moyenne sur une durée de 100 temps de cisaillement du côté cyclonique et 200 temps de cisaillement du côté anticyclonique. Cette différence vient de l'amplitude des fluctuations, plus élevée dans le cas de la turbulence anticyclonique que dans le cas cyclonique. Notons que cette définition est en partie arbitraire et les Reynolds critiques

<sup>16</sup>Une étude complète devrait faire intervenir tous les paramètres en incluant le rapport d'aspect et les conditions aux limites. Ce type d'approche reste cependant trop coûteux en terme de temps de calcul.



obtenus dépendent directement de cette dernière. Cependant, compte tenu des remarques précédentes, il apparaît qu'une autre définition ne devrait changer nos résultats que d'un facteur multiplicatif de l'ordre de l'unité.

### § 52.1. *Protocole*

Pour étudier la transition turbulente, nous avons choisi d'effectuer des simulations à Reynolds constant, en utilisant à la fois le code spectral décrit dans la partie précédente, et le code aux différences finies. Pour effectuer une exploration systématique de l'espace des paramètres, on fait alors varier progressivement le nombre de rotation des simulations.

En pratique, on choisit donc un nombre de Reynolds. Selon la cyclonicité voulue, on choisira comme point de départ un état marginalement instable d'après le critère linéaire : soit  $R_\Omega = 0$  (côté cyclonique) soit  $R_\Omega = -1$  (côté anticyclonique). Les conditions initiales choisies sont une excitation aléatoire et incompressible des modes les plus larges dans la boîte de simulation. Des tests, incluant par exemple des vortex, ont montré que ces résultats étaient peu dépendants de cette condition initiale. Par la suite, on fait évoluer par palier le nombre de rotation au cours du temps, les paliers devant être suffisamment longs pour pouvoir vérifier que l'écoulement est bien turbulent d'après le critère précédent ( $100$  ou  $200 \text{ S}^{-1}$  selon la cyclonicité). Ce protocole présente l'avantage de limiter la dépendance vis-à-vis des conditions initiales. En effet, on peut supposer que le mécanisme d'auto-entretien évolue lorsque l'on modifie  $R_\Omega$ . Ainsi, des conditions initiales idéales pour une région de l'espace des paramètres peuvent ne pas l'être pour une autre. Une évolution continue à partir d'un point turbulent telle que celle proposée ici permet de faire évoluer progressivement l'écoulement et donc le mécanisme d'auto-entretien, de sorte que la turbulence soit maintenue le plus longtemps possible. Ce protocole nous permet alors de tracer l'évolution, en fonction du temps, du transport turbulent et de l'énergie turbulente. La figure (51) montre un tel tracé du côté cyclonique et du côté anticyclonique pour  $Re = 12000$  avec notre code spectral et une résolution de  $64^3$ .

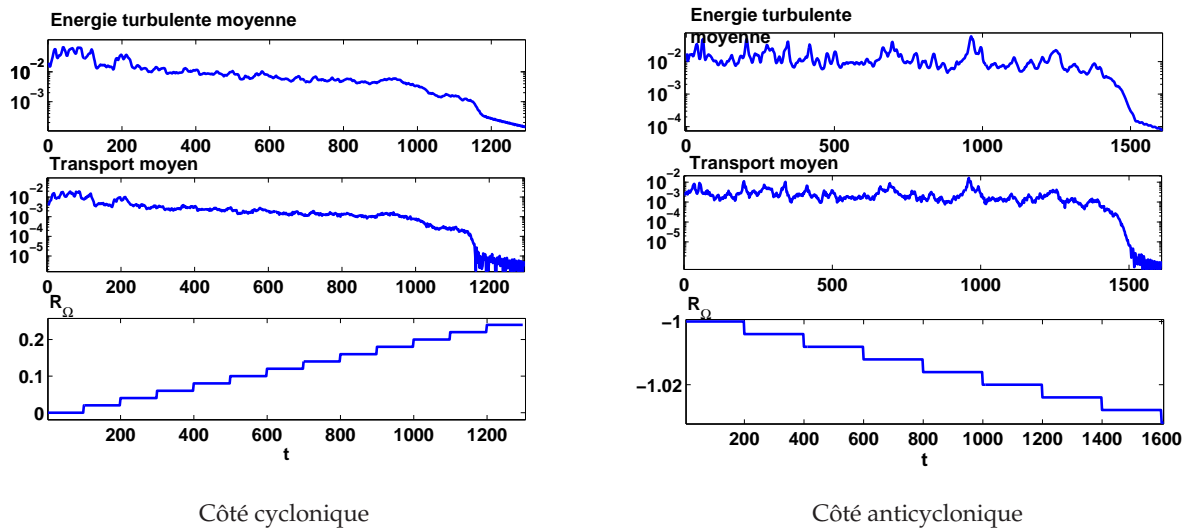
Sur ces exemples, on peut voir que la turbulence est maintenue jusqu'à  $R_\Omega = 0.2$  du côté cyclonique et  $R_\Omega = -1.024$  du côté anticyclonique. Ce protocole peut-être réitéré en changeant le nombre de Reynolds et obtenir ainsi la courbe d'instabilité non linéaire dans l'espace  $(Re, R_\Omega)$ . Pour confirmer ces courbes, j'ai effectué d'autres tests avec d'autres résolutions, ainsi que d'autres méthodes numériques (différences finies).

### § 52.2. *Résultats cycloniques*

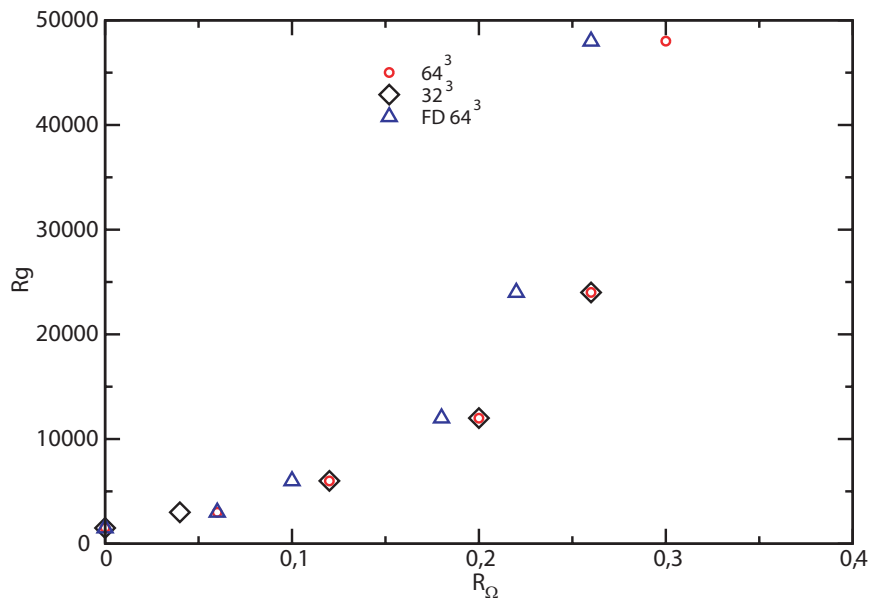
Du côté cyclonique, on obtient la limite d'instabilité donnée sur la figure (52). On pourra remarquer que les simulations aux différences finies semblent ne pas atteindre des nombres de rotation aussi élevés que les simulations spectrales : on peut y voir un effet de résolution ou de compressibilité (le code aux différences finies, compressible, montre des vitesses caractéristiques de l'ordre de la vitesse du son). En effet, les méthodes aux différences finies ont une résolution des petites échelles beaucoup plus approximative que les méthodes spectrales. Ainsi, lorsque l'on sera proche du seuil, la phénoménologie développée au chapitre précédent montre que le mécanisme d'auto-entretien occupera toute la largeur du spectre simulé. Si les petites échelles sont alors mal résolues, la turbulence disparaît spontanément.

Remarquons de plus qu'en raison du protocole utilisé, on est certain que la turbulence auto-entretenu existe pour chaque point de la figure (52). Néanmoins, en raison de l'échantillonnage



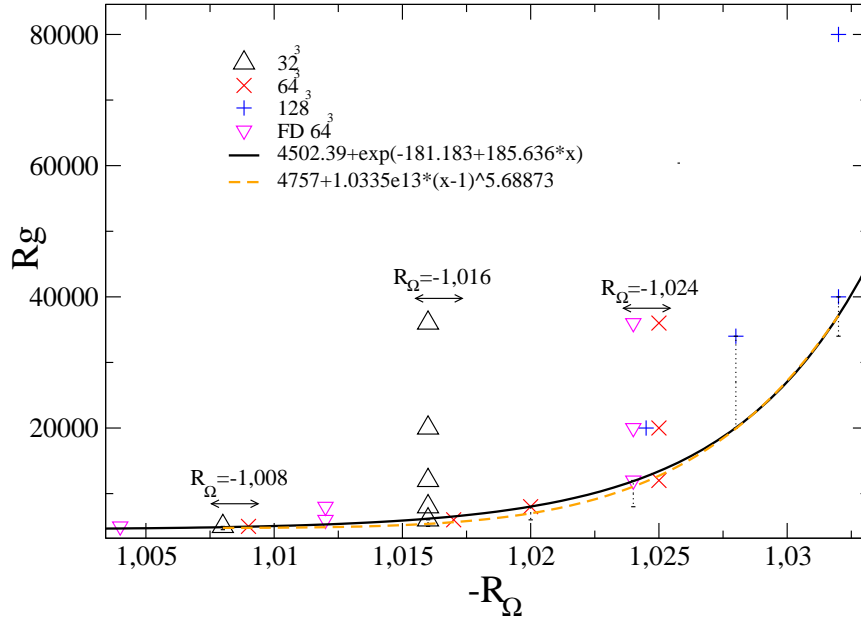


**FIG. 51.** Exemple de simulation spectrale avec  $64^3$  modes et  $Re = 12000$ , représentant l'évolution de l'énergie turbulente moyenne et du transport moyen en fonction du temps. On notera l'augmentation (ou la diminution) par palier du nombre de rotation imposé au cours du temps.



**FIG. 52.** Limite de stabilité pour un écoulement cyclonique. Les cercles correspondent aux simulation spectrales  $64^3$ , les losanges aux simulations spectrales  $32^3$  et les triangles aux simulations différences finies  $64^3$ .

en Reynolds utilisé, un point situé en dessous d'un point testé pourrait être aussi turbulent. Ceci est vrai jusqu'au Reynolds testé immédiatement inférieur. En effet, pour ce Reynolds, on est sûr que la turbulence n'existe pas, d'après notre protocole. L'échantillonnage introduit donc une barre d'erreur (non représentée ici) qui peut avoir un impact important sur les résultats. Notons enfin que les simulations représentées ici sont résolues : les points spectraux de résolutions différentes donnent le même résultat.



**FIG. 53.** Limite de stabilité pour un écoulement anticyclonique. Tous les points sont calculés avec le code spectral, exceptés les triangles (code différence finie). Les barres d'erreur (pointillées) proviennent de l'échantillonnage en Reynolds (voir texte). Les points trop proches ont été écartés pour faciliter la lecture. Enfin, les points situés sur les courbes correspondent à des simulations résolues, les autres non (voir texte).

### § 52.3. Résultats anticycloniques

La courbe de stabilité marginale du coté anticyclonique est donnée sur la figure (53). Contrairement au cas cyclonique, on voit que la dépendance en  $R_\Omega$  est très forte et la turbulence est perdue numériquement dès  $R_\Omega = -1.034$ , c'est-à-dire très proche de la stabilité marginale. De plus, on remarque que des résolutions de plus en plus élevées sont requises pour atteindre les points les plus éloignés. En particulier les simulations les moins résolues ( $32^3$ ) semblent atteindre un nombre de rotation minimum, puis, quel que soit le Reynolds utilisé, ne dépassent plus ce point. Les simulations mieux résolues montrent que la courbe de transition physique ne suit pas cette coupure brutale et qu'il s'agit donc là d'un effet purement numérique, dû à des simulations non résolues.

Pour expliquer la figure (53), supposons dans un premier temps que la résolution soit infinie, et étudions le comportement de la plus petite échelle du mécanisme d'auto-entretien  $l_M$  et l'échelle de dissipation  $l_\eta$ . Considérons une simulation à un Reynolds donné et supposons alors que  $l_\eta$  est constant durant cette simulation<sup>17</sup>. Initialement ( $R_\Omega = -1$ ), l'écoulement est turbulent :  $l_M(R_\Omega = -1) > l_\eta(Re)$ . Lorsque l'on diminue progressivement  $R_\Omega$ , la figure (53) montre que  $R_g$  augmente, c'est-à-dire que  $l_M(R_\Omega)$  diminue. Arrivé à un certain point, on a :

$$l_M(R_\Omega) \simeq l_\eta(Re) \quad (52.191)$$

C'est le seuil d'instabilité non linéaire au delà duquel la turbulence disparaît. Supposons à présent que l'on effectue une simulation sous résolue. Par définition, on a  $l_\eta < l_g$  où  $l_g$  est la

<sup>17</sup>En réalité,  $l_\eta$  n'est pas constant. Cependant, si l'on suppose un spectre de type Kolmogorov, on montre que  $l_\eta \simeq L/(Re^{3/4}\alpha^{1/4})$  de sorte que l'on peut considérer  $l_\eta \simeq \text{cte}$  dans notre domaine d'étude.

taille de grille. La simulation suivra alors le même cheminement que précédemment, mais la turbulence disparaîtra lorsque le mécanisme ne pourra être résolu, c'est-à-dire lorsque :

$$l_M(R_\Omega) \simeq l_g \quad (52.192)$$

La limite d'instabilité devient alors indépendante du nombre de Reynolds, ce qui correspond aux points superposés verticalement à  $R_\Omega = -1.016$  pour une résolution de  $32^3$  et  $R_\Omega = -1.024$  à  $64^3$ .

En suivant cette phénoménologie, on constate donc que le mécanisme d'auto-entretien du coté anticyclonique devient très rapidement étendu spectralement, et requiert donc des résolutions élevées. Ce point explique aussi l'échec de Hawley *et al.* (1999) pour détecter la turbulence sous-critique au régime képlerien : la résolution requise est beaucoup trop élevée pour pouvoir être atteinte avec les moyens numériques actuels. Remarquons cependant que c'est le contrôle de la dissipation dans le code qui nous a permis d'expliquer ce résultat *a priori* aberrant.

### § 53. Transport et instabilité non linéaire

Comme je l'ai déjà fait remarquer, le transport turbulent est une quantité qui intéresse beaucoup l'astrophysicien pour les modèles de disque. Dans ce travail, j'ai essayé de quantifier le transport qui serait dû au transport turbulent dans un vrai disque, en me fondant sur le résultat des simulations. En particulier, le modèle phénoménologique du chapitre précédent montrait que, pour une turbulence sous-critique, on s'attendait à avoir au seuil de transition une relation de proportionnalité entre le coefficient de transport adimensionnalisé  $\alpha$  et l'inverse du Reynolds de transition  $Rg$  (Eq. 41.164, p.82). Pour tester ce résultat en éliminant le maximum de bruit, nous avons commencé par couper les courbes temporelles (Figs. 52 et 53) à chaque changement de  $R_\Omega$ , ce qui nous donne des segments de simulations à  $R_\Omega$  constant. Cette procédure, effectuée pour toutes les simulations disponibles, permet d'obtenir des séries de segments ayant le même nombre de rotation mais pas le même nombre de Reynolds.<sup>18</sup> D'après l'équation (41.165), le coefficient de transport ne dépend pas du Reynolds dans l'état turbulent. On s'attend donc à trouver le même coefficient de transport dans chacune des séries à  $R_\Omega$  constant. Ainsi, en faisant la moyenne du coefficient de transport de chaque série, on obtient la dépendance  $\alpha(R_\Omega)$ . Connaissant le Reynolds de transition  $Rg$  pour chaque  $R_\Omega$  d'après les figures (52) et (53), on peut finalement obtenir le tracé du transport moyen  $\alpha$  en fonction du Reynolds transition (Fig. 54).

La corrélation remarquable observée sur cette figure correspond à l'équation du modèle phénoménologique (41.164) dans la limite  $Rg \rightarrow \infty$ . Plus précisément, on trouve du coté cyclonique :

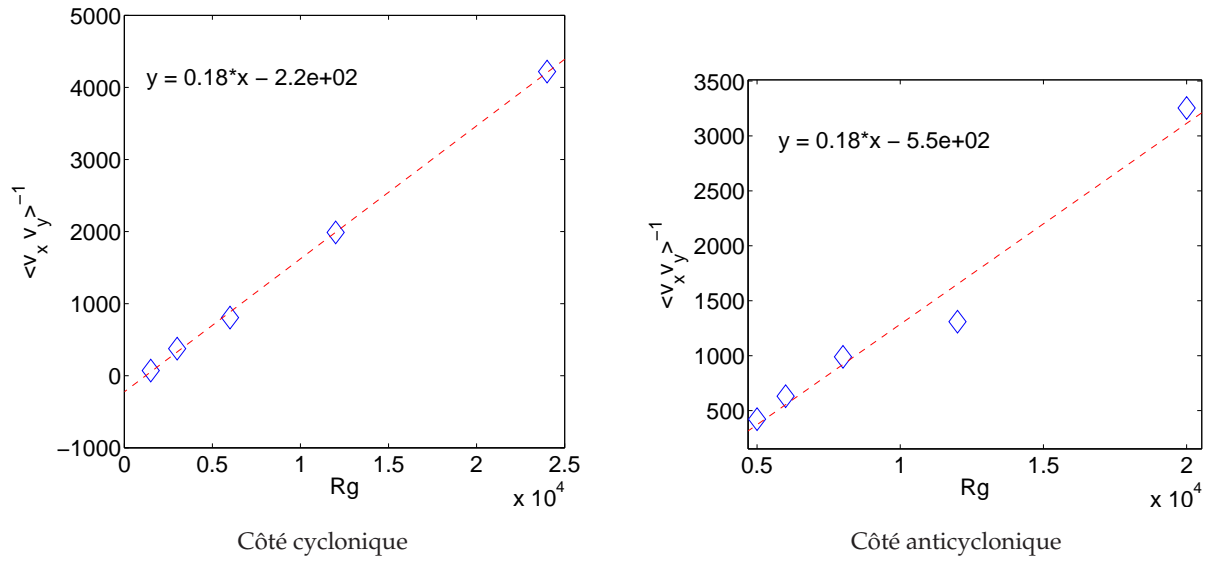
$$\langle v_x v_y \rangle = \frac{5.5}{Rg - 1250} (Sd)^2 \quad (53.193)$$

et du coté anticyclonique :

$$\langle v_x v_y \rangle = \frac{5.5}{Rg - 3000} (Sd)^2 \quad (53.194)$$

On pourra remarquer que les constantes de correction sur  $Rg$  diffèrent du coté cyclonique et du coté anticyclonique, ce qui peut-être expliqué par un Reynolds de transition différent pour les 2 points de stabilité marginale  $R_\Omega = 0$  et  $R_\Omega = -1$ .

<sup>18</sup>Les segments présentant un écoulement laminaire ne sont évidemment pas inclus dans ces séries.



**FIG. 54.** Évolution du transport moyenné en fonction du nombre de rotation. Les moyennes sont faites sur des extraits de simulation ayant des Reynolds différents mais des nombres de rotation identiques.

En utilisant les extrapolations proposées sur la figure (53), on peut obtenir différentes estimations du Reynolds critique au régime képlerien. Ces valeurs, combinées à (53.194), permettent alors d'obtenir des estimations du transport au régime képlerien (Tab. 3). Aux extrapolations de la figure (53), j'ai rajouté l'extrapolation linéaire des dernières valeurs obtenues, et une estimation sans extrapolation, considérant que  $Rg$  est constant à partir du dernier point résolu. Remarquons que cette dernière valeur constitue une borne supérieure pour le transport : si elle était vérifiée, alors on aurait détecté la turbulence sous-critique au régime képlerien avec notre code spectral à une résolution de  $128^3$ , ce qui n'est pas le cas. Notons de plus que le Reynolds des disques astrophysiques étant estimé à  $10^{10} - 10^{15}$  (voir introduction), l'extrapolation exponentielle prédit l'absence d'instabilité sous-critique.

	Exponentiel	loi de puissance	linéaire	aucune extrapolation
$Rg$	$1,3 \times 10^{26}$	$1,1 \times 10^8$	$1,8 \times 10^6$	$4 \times 10^3$
$\alpha$	n/a	$5 \times 10^{-10}$	$3,1 \times 10^{-6}$	$3 \times 10^{-4}$

**TAB. 3.** Valeurs estimées du Reynolds de Transition et du transport d'après les extrapolations de la figure (53). La valeur donnée par la dernière colonne est une borne supérieure au transport, supposant que  $Rg$  ne varie plus jusqu'à  $R_\Omega = -4/3$  depuis le dernier point résolu ( $Re = 4 \times 10^4$ ,  $R_\Omega = -1.034$ ).

Ces résultats permettent donc de conclure que le transport dû à l'instabilité sous-critique, si elle existe effectivement dans les disques, est au plus de  $3 \times 10^{-4}$ , les valeurs raisonnables se situant dans l'intervalle  $10^{-8} - 10^{-5}$ .

## 2. Discussion

### § 54. Convergence numérique

Les résultats précédents étant obtenus avec des nombres de Reynolds relativement élevés, il est important de vérifier que les simulations sont bien résolues. En pratique, une vérification de convergence s'effectue en simulant plusieurs fois le même processus avec des résolutions différentes. A partir d'une certaine résolution, les résultats deviennent identiques : c'est la résolution minimum *pour le processus considéré*. Le test classique de résolution a été effectué pour certains points (voir Figs. 52 et 53). Cependant, les simulations à plus haut Reynolds et donc haute résolution n'ont pu être testées en raison du coût prohibitif en temps de calcul (un doublement de la résolution entraînant, avec notre code spectral, une augmentation d'un facteur 20 du temps d'intégration). Dans cette section, je vais donc montrer quelques arguments justifiant la convergence des simulations précédentes.

#### § 54.1. Dissipation numérique

Un point important, et souvent négligé en astrophysique, est le contrôle des phénomènes dissipatifs. En particulier, il convient de maintenir la dissipation numérique à un niveau faible comparativement à la dissipation visqueuse. Dans notre travail, nous avons basé le contrôle de la dissipation sur l'équation d'énergie (41.159). Pour les écoulements cisailés en rotation, cette équation se réduit à :

$$\partial_t \langle e \rangle = -S \langle v'_x v'_y \rangle - \nu \sum_i \langle (\nabla v'_i)^2 \rangle - \varepsilon_{\text{num}} \quad (54.195)$$

où les crochets  $\langle \rangle$  sont des moyennes de boîte. De plus, on a rajouté dans l'équation précédente un terme représentant la dissipation numérique ( $\varepsilon_{\text{num}}$ ), *a priori* dépendant du code utilisé et donc inconnu. Pour contrôler les effets dissipatifs dans un code, il convient alors d'introduire une dissipation physique non négligeable, comme ce qui a été fait dans notre travail. Le calcul numérique à chaque pas de temps de (54.195) permet alors d'obtenir une estimation de la dissipation numérique. On calculera alors sa contribution à la dissipation totale en évaluant :

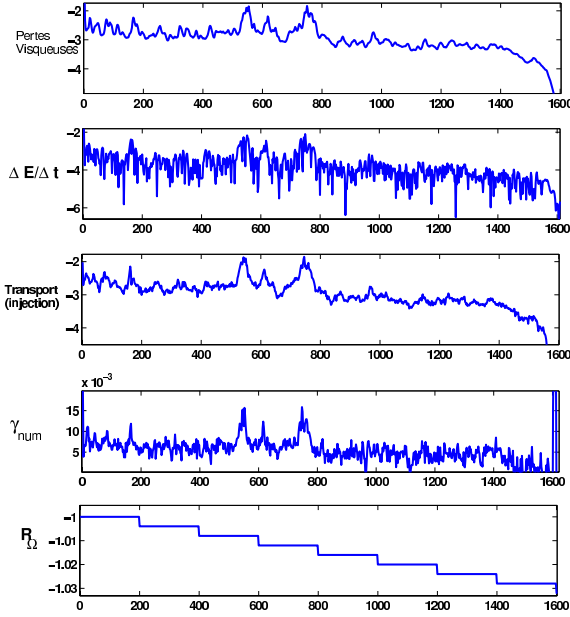
$$\gamma_{\text{num}} = \frac{\varepsilon_{\text{num}}}{\varepsilon_{\text{num}} + \nu \sum_i \langle (\nabla v'_i)^2 \rangle} \quad (54.196)$$

Il convient alors de maintenir ce terme à des valeurs aussi faibles que possible. Par exemple, on a tracé l'évolution des différents termes de l'équation (54.196) pour une simulation à  $Re = 2 \times 10^4$  et une résolution de  $64^3$  sur la figure (55). Dans cet exemple, la dissipation numérique représente au plus 2% de la dissipation totale ( $\gamma_{\text{num}}$ ). De plus, cet exemple est à la limite de résolution (voir Fig. 53). On montre ainsi que sur toutes les simulations présentées ici, la dissipation numérique ne représente qu'une part négligeable de la dissipation du code.

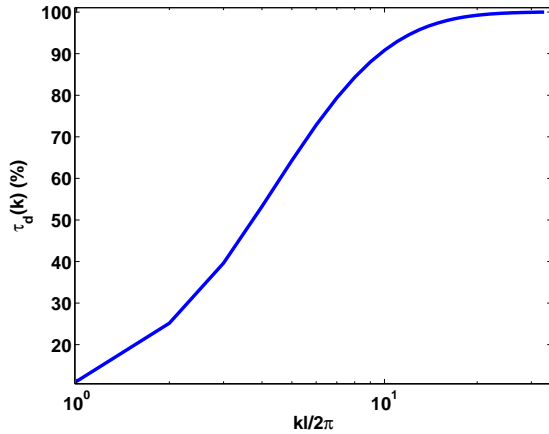
Un autre aspect intéressant pour quantifier la dissipation est de connaître l'échelle de dissipation typique dans les simulations. Pour se faire, on peut calculer la contribution de chaque échelle à la dissipation totale. On calcule ainsi :

$$\tau_d(k) = \nu \int_{-k}^k dk_x \int_{-k}^k dk_y \int_{-k}^k dk_z k^2 E(k_x, k_y, k_z) \quad (54.197)$$

où  $E(k_x, k_y, k_z)$  est l'énergie turbulente dans le mode  $(k_x, k_y, k_z)$ . La quantité  $\tau_d(k)$  correspond alors à la contribution des échelles de tailles supérieures à  $2\pi/k$  à la dissipation. A titre



**FIG. 55.** Évolution des différents termes de l'équation (54.196) pour une simulation à  $Re = 2 \times 10^4$  et une résolution de  $64^3$  avec notre code spectral. On remarque que la part relative de dissipation numérique ( $\gamma_{\text{num}}$ ) reste inférieure à 2%.



**FIG. 56.** Représentation de la contribution des échelles de nombre d'onde inférieur à  $k$  à la dissipation totale (en %). On remarque que 90% de la dissipation est due à des échelles de taille supérieure ou égale à 2 fois la taille de grille. D'après une simulation à  $Re = 6000$  et une résolution de  $64^3$ .

d'exemple, on a représenté  $\tau_d(k)$  pour une simulation  $64^3$  et  $Re = 6000$  sur la figure (56). On pourra notamment remarquer que l'essentiel de la dissipation (90%) se fait sur des échelles dont la taille est supérieure à 2 fois la taille de grille. On en conclut donc *a priori* qu'une simulation  $32^3$  sera à la limite de résolution dans les mêmes conditions, ce qui est effectivement le cas (Fig. 53). On peut donc en conclure que les segments verticaux observés sur la figure (53) sont bien dus à une échelle de dissipation devenant plus petite que l'échelle de grille, conformément à ce que nous avons avancé au § 52.3.

### § 54.2. Spectres et convergence

L'étude des spectres du champ turbulent peut fournir une information complémentaire sur le comportement des échelles de dissipation en fonction de la résolution. En particulier, on s'attend à observer un spectre en  $k^{-5/3}$  dans la partie inertielle (entre  $l_M$  et  $l_\eta$ ). A partir d'une certaine échelle, la pente doit devenir plus importante en raison des phénomènes dissipatifs. Nous

proposons sur la figure (57) les spectres moyennés de simulations avec différents Reynolds et résolutions pour un nombre de rotation de  $-1.016$ . D'après la figure (53), la simulation à  $32^3$  n'est résolue que pour  $Re = 6000$ . On remarquera que pour cette valeur du Reynolds, on observe effectivement le début de la chute du spectre aux petites échelles. De plus, les spectres à  $32^3$  et  $64^3$  se superposent, signe d'une bonne concordance entre les 2 simulations et donc d'une résolution suffisante. Pour  $Re = 12000$ , seule la simulation  $64^3$  est résolue d'après la figure (53). On remarquera que le spectre à  $32^3$  ne fait pas apparaître de domaine dissipatif. En particulier, le domaine dissipatif du spectre  $64^3$  apparaît au niveau de la coupure du spectre  $32^3$  : ce dernier n'est donc clairement pas résolu.

Les simulations à  $Re = 20000$  ne sont résolues ni à  $32^3$  ni à  $64^3$ . On notera que le spectre à  $32^3$  adopte un comportement aberrant, dominé par les petites échelles. Ce type de phénomène est typique des codes spectraux : une dissipation physique trop faible sur le domaine spectral résolu entraîne une accumulation d'énergie aux petites échelles en raison d'une dissipation numérique extrêmement faible. Le spectre  $64^3$  suit la loi de Kolmogorov jusqu'à la coupure sans exhiber de coupure de dissipation. Nul doute que ce dernier aurait un comportement similaire au spectre  $32^3$  à des Reynolds plus important.

On le comprend donc, l'analyse des spectres confirme l'analyse initiale que nous avons pu faire sur la figure (53).

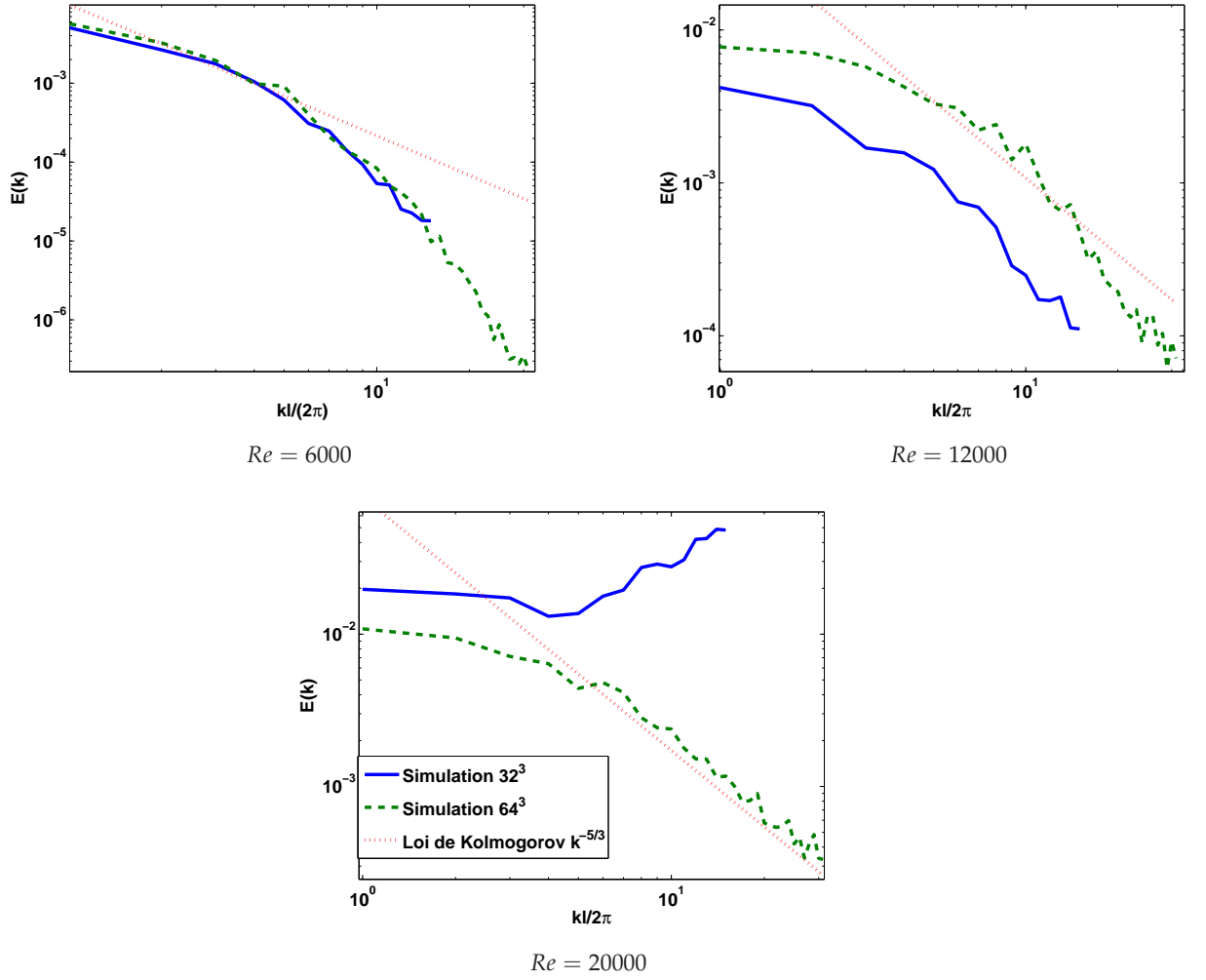
### § 54.3. Transport et modèle phénoménologique

Le modèle phénoménologique proposé précédemment suppose que le transport a lieu essentiellement aux grandes échelles, dans le mécanisme d'auto-entretien. C'est ce modèle phénoménologique, combiné avec nos résultats numériques (Fig. 54) qui permet d'obtenir une estimation du transport dans les disques.

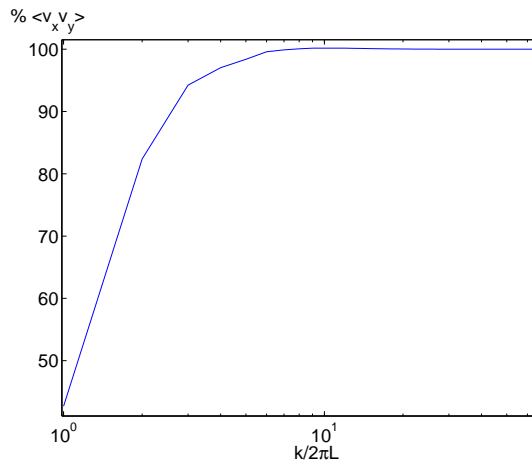
Un modèle alternatif serait d'imaginer un mécanisme d'entretien de plus en plus efficace lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds, de sorte que le transport soit plus efficace que prévu dans les disques à très grands Reynolds. Ceci se traduirait par un mécanisme d'auto-entretien de plus en plus large spectralement, s'étendant de l'échelle de boîte  $L$  jusqu'aux plus petites échelles de dissipation  $l_\eta$ . On peut cependant objecter à ce modèle trois contre-arguments importants. Premièrement, remarquons qu'un mécanisme d'auto-entretien nécessite forcément des mouvements en phase sur différentes échelles. Un mécanisme très étalé spectralement tout en étant efficace sur tout le domaine spectral nécessiterait donc une très forte corrélation temporelle sur des échelles variant d'un facteur  $10^5$ , ce qui semble peu plausible. Deuxièmement, les expériences de Dubrulle *et al.* (2005a) mettent en avant un couple en  $Re^2$  dans les écoulements de Couette-Taylor en turbulence totalement développée, ce qui correspond à un  $\alpha$  indépendant du Reynolds. Enfin, on peut remarquer que le transport moyen peut s'écrire à l'aide des modes Fourier sous la forme :

$$\langle v_x v_y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{v}_x(k_n) \tilde{v}_y^*(k_n) \quad (54.198)$$

Cette égalité nous permet de calculer la contribution de chaque échelle  $k_n$  au transport total observé dans une simulation. Ce type de calcul est donné sur la figure (58) sur laquelle on a représenté la contribution au transport total des échelles de nombre d'onde inférieur à  $k$ , pour une simulation avec une résolution de  $128^3$  et un nombre de Reynolds de  $2 \times 10^4$ . On peut ainsi



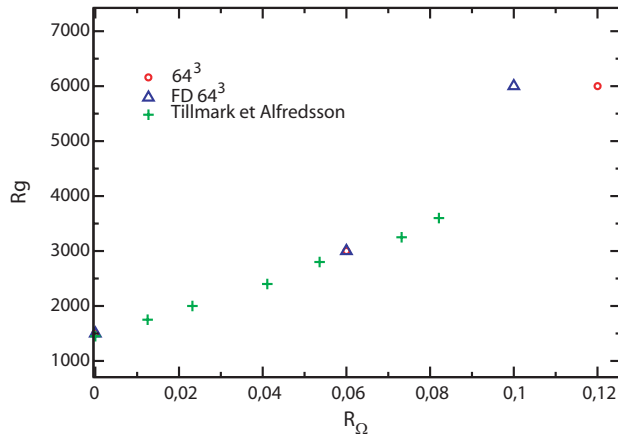
**FIG. 57.** Spectres d'énergie pour deux résolutions différentes. On donne en pointillés rouges la pente correspondant au spectre de Kolmogorov. La simulation à  $32^3$  n'est résolue que pour  $Re = 6000$ . La simulation  $64^3$  est résolue pour  $Re = 6000$  et  $Re = 12000$  et. Spectres obtenus pour  $R_\Omega = -1.016$ .



**FIG. 58.** Représentation de la contribution des échelles de nombre d'onde inférieur à  $k$  au transport total (en %). On remarque que 90% du transport est dû à des échelles de taille supérieure à  $1/4$  de la taille de boîte. D'après une simulation à  $Re = 2 \times 10^4$  et une résolution de  $128^3$ .

observer que, bien que l'on soit très proche du seuil d'après la figure (53), le transport reste dominé par les plus grandes échelles disponibles dans la boîte de simulation.





**FIG. 59.** Reynolds de Transition en fonction du nombre de rotation d'après les données de Tillmark & Alfredsson (1996) et nos données de simulations spectrales (cercles) et différences finies (triangle). Les simulations de Komminaho *et al.* (1996) se superposent au point  $R_\Omega = 0,06$ ,  $R_g = 3000$  et n'ont pas été représentés sur la figure.

Ces trois arguments montrent que, bien que non définitivement rejeté, l'argument d'un transport fort aux très petites échelles semble très peu probable, et ne permet donc pas d'utiliser la turbulence sous-critique comme explication au transport dans les disques astrophysiques.

## § 55. Comparaison avec les résultats antérieurs

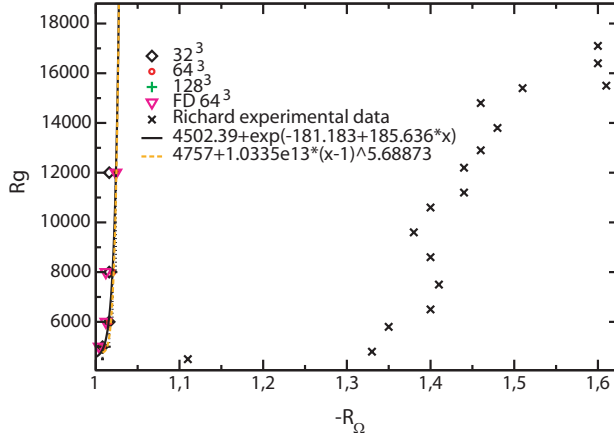
Comme nous l'avons dit précédemment, d'autres simulations et expériences ont été effectuées avant ce travail, et il convient donc de les comparer et éventuellement expliquer les divergences de comportement. Concernant les résultats numériques de Hawley *et al.* (1999), nous avons montré qu'ils étaient parfaitement reproductibles sans dissipation [panneau de gauche de la figure (49)]. L'effet de coupure qu'ils observaient étant un effet de résolution identique à ce que nous avons observé et expliqué sur la figure (53). En particulier, on remarquera que leurs résultats (Fig. 49) correspondent à ce que l'on observe sur nos simulations avec un Reynolds  $Re = 12000$ .

### § 55.1. Côté cyclonique

Parmi les résultats du côté cyclonique, on peut citer ceux de Tillmark & Alfredsson (1996), tirés de résultats expérimentaux sur un écoulement de Couette plan tournant, ainsi que Komminaho *et al.* (1996), sur des simulations de Couette plan, dont une faite avec rotation. On a reporté ces résultats expérimentaux et numériques sur la figure (59), superposés aux premiers points de nos propres résultats (Fig. 52). Comme on peut le remarquer, l'accord obtenu entre ces différents résultats, en présence de conditions aux limites différentes est remarquablement bon. Notons que l'on ne peut utiliser les résultats de Richard (2001) en raison de la forte influence de la courbure sur la turbulence de côté cyclonique (voir § 50.1).

### § 55.2. Côté anticyclonique

Les résultats du côté anticyclonique sont beaucoup plus rares dans la littérature. D'un point de vue expérimental, il est assez difficile d'explorer le régime anticyclonique linéairement stable en raison des fortes vitesses de rotation nécessaires. Ainsi, il n'existe pas à notre connaissance d'expérience d'écoulement de Couette plan tournant dans ce régime. On peut cependant noter les résultats de Richard (2001) dans un écoulement de Couette-Taylor, apparemment



**FIG. 60.** Reynolds de Transition en fonction du nombre de rotation d'après les données de Richard (2001) et nos données de simulations spectrales (losanges, cercles et croix) et différences finies (triangle inversé). La croissance de  $R_g$  en fonction de  $R_\Omega$  semble beaucoup plus importante pour nos simulations que pour les données de Richard.

peu modifiés par la présence de courbure (§ 50.1). Nous avons donc superposé les résultats expérimentaux anticycloniques (Fig. 48) avec nos résultats (Fig. 53) sur la figure (59).

On remarque immédiatement que, contrairement au côté cyclonique, le désaccord entre transition expérimentale et numérique est extrêmement fort. En particulier, les expériences donnent une transition sous-critique au régime képlerien pour  $Re \simeq 4000$  alors que les simulations extrapolées prédisent une transition vers  $Re \simeq 10^8$ . Ces différences peuvent être expliquées par plusieurs biais, parmi lesquels on retrouve :

**Rôle des conditions aux limites:** Les simulations ont toutes été effectuées avec des conditions aux limites type shearing sheet, assez différentes des conditions type murs utilisées dans les expériences.

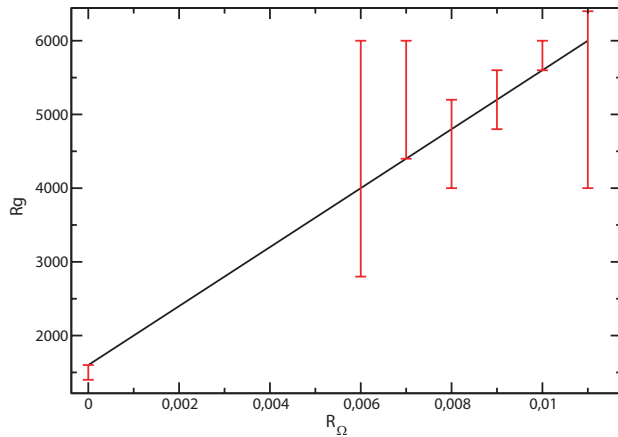
**Rapport d'aspect:** Les simulations mettent en jeu des boîtes de taille relativement modeste. On peut donc s'attendre à ce que ces boîtes limitent le développement de la turbulence, ou la supprime.

**Conditions initiales:** Bien qu'*a priori* maîtrisées par notre protocole numérique, nous n'avons pas pu tester toutes les conditions initiales possibles. Les expériences, avec leur bruit naturel, accèdent donc à un éventail plus large de conditions initiales.

**Circulation d'Ekman:** Les conditions aux limites verticales ne peuvent être maîtrisées parfaitement dans les expériences de Couette-Taylor (elles supposeraient en effet l'usage d'un mur dont la vitesse dépend de la position!). Les conditions aux limites utilisées en pratique engendrent donc naturellement un écoulement secondaire d'Ekman, propice à la formation de turbulence « artificielle »

**Bruit de manipulation:** Les expériences du côté anticyclonique mettant en jeu de grandes vitesses de rotation, il n'est pas exclu d'observer une turbulence apparente engendrée par des artefacts de la manipulation.

Cette liste est bien entendu non exhaustive, mais est représentative des différentes remarques pouvant être apportées à ce travail. Je vais donc étudier ces diverses possibilités, et je fournirai quelques indices sur les raisons probables de la cohérence des résultats observés sur la figure (60).



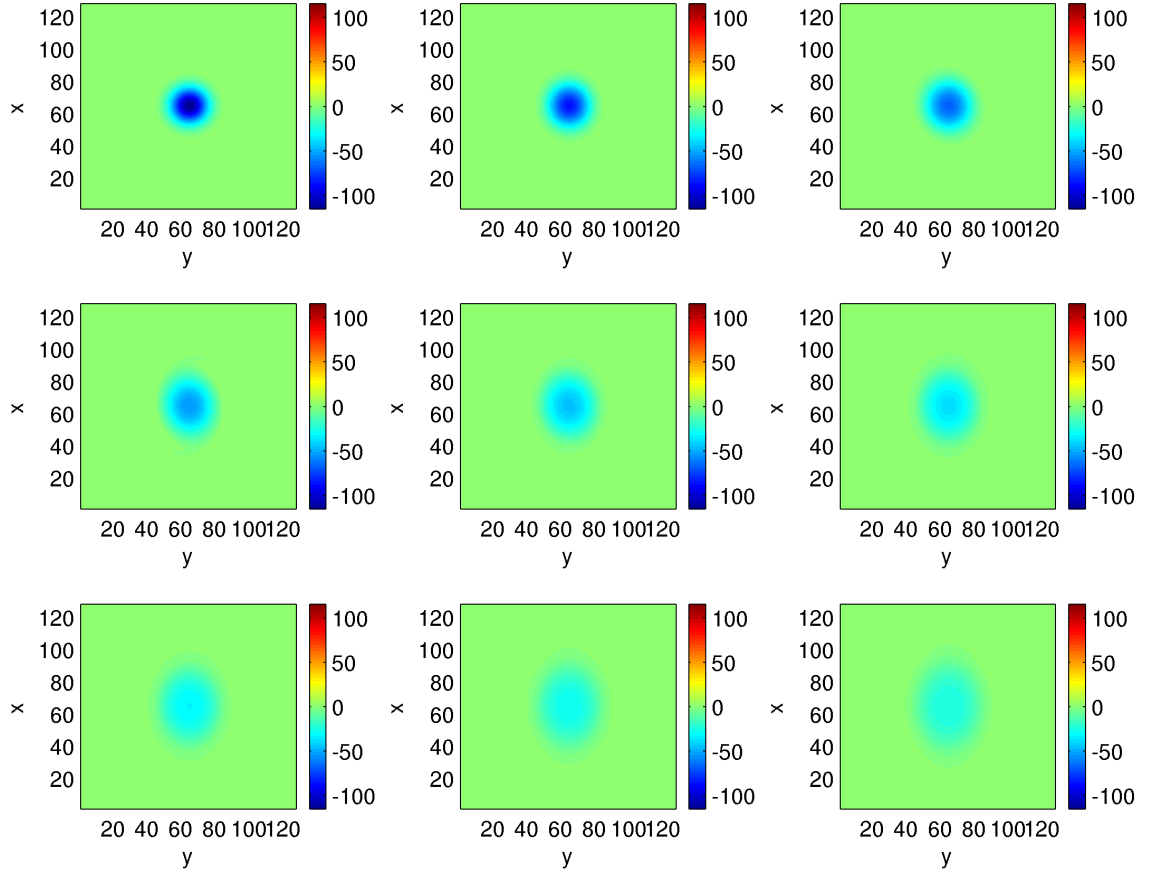
**FIG. 61.** Reynolds de Transition en fonction du nombre de rotation dans un écoulement de Couette plan avec murs. Le rapport d'aspect utilisé est  $L_x = 1,75\pi$   $L_y = 1$   $L_z = 1,2\pi$  et la résolution  $40 \times 80 \times 40$  avec Zeus3D.

## § 56. Conditions aux limites et rapport d'aspect

Le rôle des conditions aux limites dans les simulations est assez difficile à détecter, notamment en raison de l'utilisation d'un code spectral avec lequel il n'est pas possible de les modifier. Remarquons cependant que les résultats de la figure (59) sont obtenus avec soit des conditions aux limites de type shearing sheet (résultats spectraux), soit avec des murs (Tillmark & Alfredsson 1996; Komminaho *et al.* 1996). De plus, les simulations de Komminaho *et al.* (1996) utilisent des boîtes très étendues dans les directions  $x$  et  $z$ , de sorte que le rapport d'aspect ne doit pas intervenir dans leur résultat. Il semble donc que, du côté cyclonique du moins, les simulations numériques en conditions shearing sheet donnent des résultats similaires à ceux avec des murs, et ce pour des rapports d'aspect quelconques ( $1 \times 1 \times 1$ ).

Cependant, le rapport d'aspect joue un rôle lors de l'utilisation de conditions aux limites type murs. On peut ainsi observer sur la figure (61) la courbe de transition obtenue pour un écoulement de Couette plan tournant, avec une résolution de  $40 \times 80 \times 40$  et un rapport d'aspect<sup>19</sup> constant de  $L_x = 1,75\pi$   $L_y = 1$   $L_z = 1,2\pi$  avec Zeus3D. On pourra en particulier remarquer que la pente de la transition ainsi obtenue est approximativement 4 fois plus importante que celle obtenue sur la figure (59). On comprend donc que le rapport d'aspect semble jouer un rôle important lorsque l'on utilise des murs, mais pas avec des conditions shearing sheet (on dira en ce sens que le shearing sheet est plus permissif pour le rapport d'aspect). Enfin, notons qu'en adaptant le rapport d'aspect dans les simulations avec murs, on peut ramener la transition aux valeurs expérimentales (Lesur 2004). Ce type de procédure est malheureusement très coûteux en temps de calcul et n'a pu être expérimenté au delà du simple test.

Enfin, du côté anticyclonique, il ne nous a pas été possible d'obtenir la transition vers la turbulence avec des murs. Ce résultat est cohérent avec l'analyse non linéaire de Rincon *et al.* (2007), mettant en avant l'absence de mécanisme identique à celui décrit par Waleffe (1997) dans les écoulements anticycloniques avec murs.



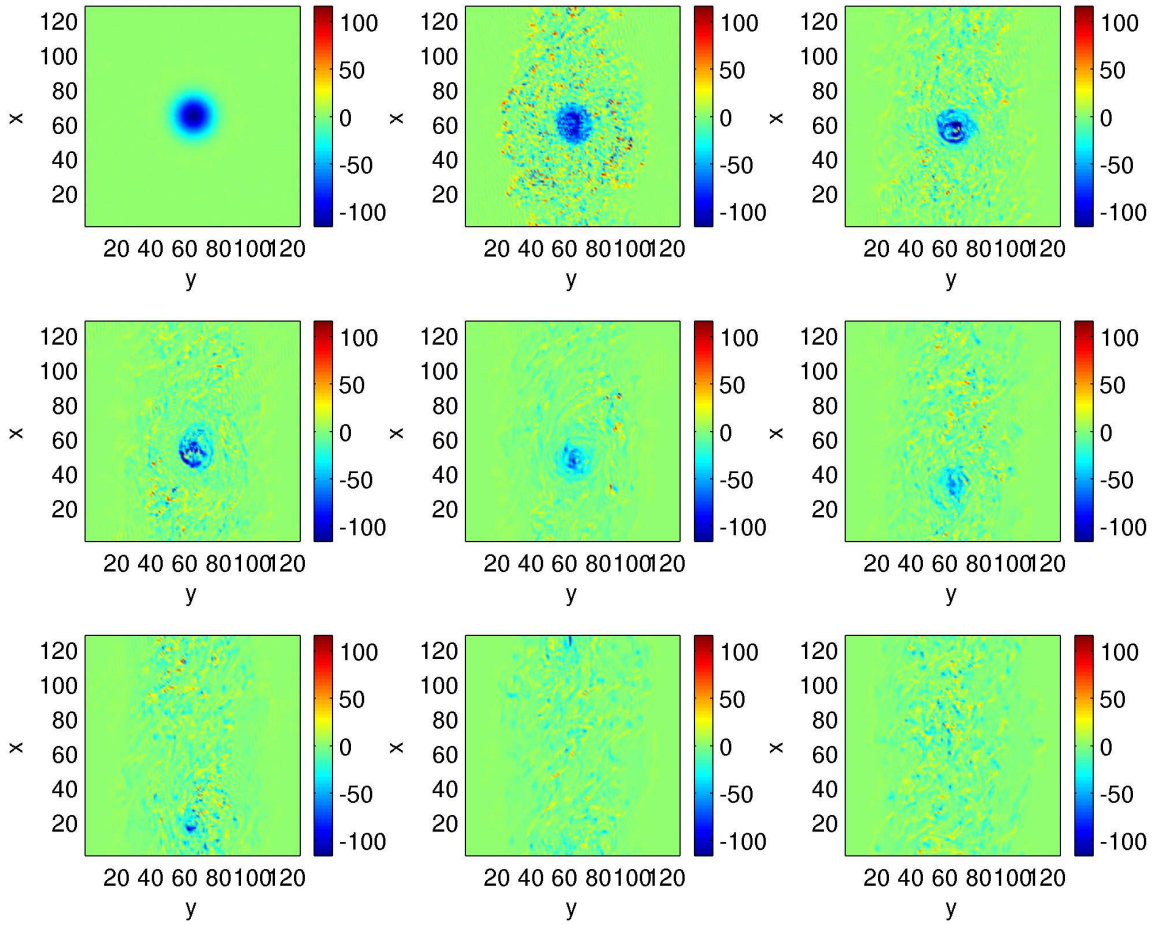
**FIG. 62.** Représentation de la vorticité de l'écart à l'écoulement laminaire tous les 20 temps de cisaillement. On observe l'évolution d'un vortex vertical dans un écoulement de Couette tournant. L'écoulement est ici purement bidimensionnel et le vortex est dissipé visqueusement.

## § 57. Conditions initiales

Les conditions initiales utilisées dans notre protocole étaient une excitation aléatoire aux grandes échelles. Cependant, le protocole utilisé permet d'obtenir une évolution progressive du fluide vers le seuil de transition, les conditions initiales sont ainsi « oubliées » par l'écoulement, et on peut estimer que le seuil de transition observé est indépendant des conditions initiales choisies.

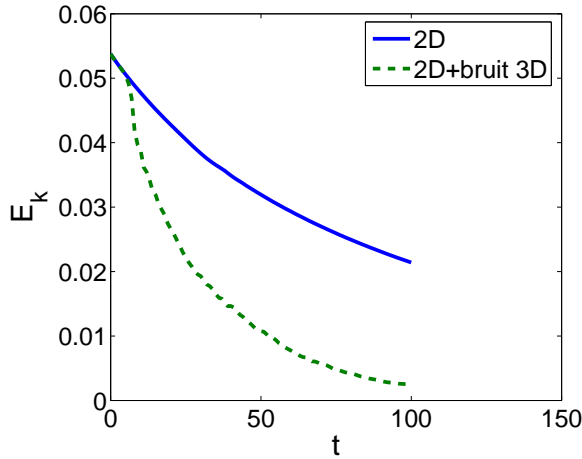
Cependant, de nombreuses simulations ont mis en avant la possibilité d'obtenir des vortex au temps de survie assez long. En 2D, les simulations de Umurhan & Regev (2004) mettent en évidence un effet d'excitation non linéaire de vortex dans les disques. La formation de vortex est aussi étudiée en 3D par Barranco & Marcus (2005) dans le cadre de simulations stratifiées dans lesquelles les vortex semblent survivre. Ces propositions sont en particulier basées sur une analogie avec la grande tache rouge de Jupiter (voir Barranco & Marcus 2005 et Marcus 1993 pour plus de détails sur cette analogie).

<sup>19</sup>Il s'agit du rapport d'aspect utilisé dans les simulations de Couette plan de Hamilton *et al.* (1995), voir § 43.

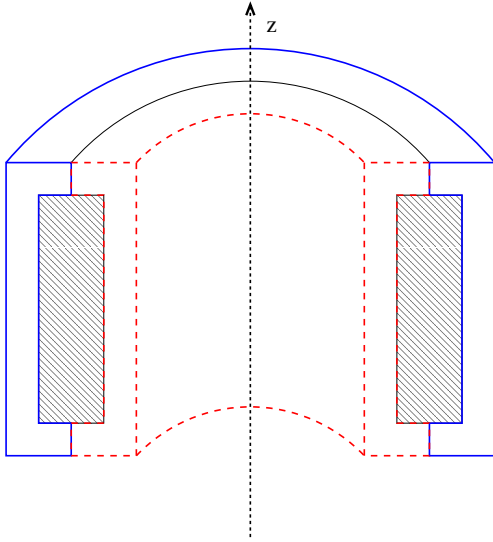


**FIG. 63.** Représentation de la vorticité de l'écart à l'écoulement laminaire tous les 20 temps de cisaillement. La condition initiale est identique à la figure (62), auquel on a ajouté un très faible bruit blanc (non visible sur la figure  $t = 0$ ). On observe l'accroissement de l'amplitude des perturbations et la destruction rapide du vortex par des mouvements 3D.

J'ai voulu tester l'hypothèse d'un vortex source d'instabilité non linéaire, telle qu'elle est avancée par Umurhan & Regev (2004). Plutôt que d'injecter un bruit aléatoire, j'ai donc injecté un vortex vertical dans une boîte *quasi* bidimensionnelle ( $L_x = 1, L_y = 1, L_z = 0,1$ ) et une résolution de  $128 \times 128 \times 16$  placée dans un régime képlerien ( $R_\Omega = -4/3$ ). Dans un premier temps, le vortex est injecté seul dans la simulation, et est naturellement dissipé visqueusement au cours du temps (Fig. 62). Nous refaisons alors la même expérience en ajoutant un faible bruit blanc tridimensionnel (Fig. 63). On voit très vite que les perturbations 3D au voisinage du vortex s'amplifient et détruisent la structure cohérente de ce dernier. Ce phénomène peut être vu sous son aspect énergétique sur la figure (64) : on remarque que le bruit blanc initialement très faible comparativement à l'amplitude du vortex entraîne une dissipation accélérée de l'énergie, par un phénomène qui peut s'apparenter à une cascade turbulente. Nous avons tenté de modifier



**FIG. 64.** Évolution des fluctuations d'énergie des simulations des figures (62) et (63). La vitesse de dissipation, identique durant les premiers temps de cisaillement, devient beaucoup plus rapide dans la simulation avec bruit : la structure cohérente du vortex est donc détruite par les mouvements 3D.



**FIG. 65.** Schéma d'un type de conditions aux limites utilisées dans les expériences de Richard (2001) : il s'agit d'une coupe dans le plan  $(r, z)$  du dispositif de Couette-Taylor (Fig. 44). Le fluide est représenté en hachures, le cylindre extérieur en trait plein et le cylindre intérieur en tirets. Les cylindres entraînent chacun une partie des murs servant de condition aux limites verticales.

la cyclonicité du vortex ainsi que son amplitude, sans changer qualitativement les résultats présentés ici.

On le voit, au moins dans le cas non stratifié, l'utilisation de vortex bidimensionnels pour justifier une instabilité sous-critique semble assez compromise. On pourra ainsi noter la destruction extrêmement rapide de ces grosses structures, malgré un rapport d'aspect largement favorable à la formation de ces dernières.

## § 58. Circulation d'Ekman

Dans les expériences de Couette-Taylor, il est difficile d'obtenir des conditions aux limites aux bords des cylindres qui ne perturbent pas l'écoulement laminaire. Dans les expériences de Richard (2001), différentes possibilités sont étudiées, et la solution la moins perturbatrice semble être l'utilisation de deux demi-cylindres (Fig. 65). Cette condition aux limites induit un écoulement parasite. En effet, le fluide proche des conditions aux limites verticales est entraîné visqueusement par ces dernières : il acquiert donc une vitesse azimutale différente du profil laminaire théorique. La force de Coriolis agit alors en engendrant un déplacement radial de ce fluide : c'est la formation d'une circulation d'Ekman (Tritton 1992).



Naturellement, on peut s'attendre à ce que cette circulation ait des effets néfastes sur la détection de la turbulence. En particulier, elle pourrait exciter artificiellement l'écoulement et faire apparaître des mouvements parasites. Pour tester l'influence réel de l'écoulement d'Ekman, j'ai donc essayé d'introduire dans une simulation de Couette plan les mêmes conditions aux limites que celles utilisées sur l'écoulement de Couette-Taylor (65).

Ainsi, j'ai simulé cet écoulement de Couette plan dans des conditions similaires à celles utilisées par Richard (2001). En particulier, je prends un Reynolds de 6000, et un rapport d'aspect de  $L_x = 6, L_y = 1, L_z = 10$ . Le rapport  $L_z/L_y$  correspondant à ce qui était utilisé dans les expériences. La résolution utilisée est de  $256 \times 64 \times 256$  et la simulation a été effectuée pendant 400 temps de cisaillement. On obtient alors typiquement une coupe correspondant à la figure (66).

Cette simulation montre l'apparition de deux petits « jets », résultats de la circulation d'Ekman sur les limites inférieures et supérieures de la boîte<sup>20</sup>. De plus, on notera que les perturbations dues à la circulation n'engendrent pas de mouvements notables dans le centre de l'écoulement : il ne semble donc pas que les conditions aux limites soient une source importante de turbulence. Enfin, les perturbations engendrées par ces conditions aux limites sont très faibles, et engendrent un transport « parasite » d'environ  $5 \times 10^{-5}$ , bien trop faible pour pouvoir expliquer les résultats expérimentaux.

Il faut cependant remarquer que cette simulation relève plutôt du simple test que de l'argument démontré. On peut en effet envisager des effets de rapport d'aspect, de courbure ou encore de résolution pouvant modifier le résultat de cette simulation. On pourra donc conclure que l'effet d'une circulation d'Ekman parasite n'est pas démontré, et nécessitera des arguments solides pour expliquer le désaccord entre résultats numériques et résultats expérimentaux.

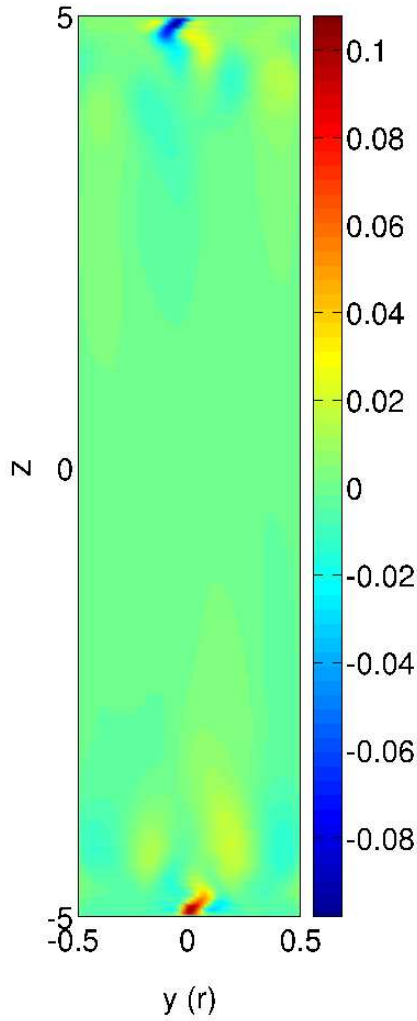
### 3. Conclusions

Les résultats de ce chapitre me permettent d'apporter les conclusions suivantes sur le rôle de la turbulence sous-critique dans les disques d'accrétion astrophysiques :

- On ne peut pas, à l'heure actuelle, trancher sur l'existence ou non d'une instabilité sous-critique hydrodynamique dans les disques en raison du Reynolds très élevé de ces écoulements, qui ne peut être reproduit ni numériquement, ni en laboratoire.
- Si elle existe, l'instabilité sous-critique ne permet pas d'expliquer le transport observé dans les disques d'accrétion, même dans les limites basses (voir introduction). En pratique, on a  $\alpha_{SS} < 3 \times 10^{-4}$ .
- Le Reynolds de transition dans le régime sous-critique est corrélé au transport turbulent, conformément à notre modèle phénoménologique.

Postérieurement à ce travail, des expériences hydrodynamiques ont été effectuées avec un dispositif de Couette-Taylor, similaire à celui de Richard, à l'université de Princeton (Ji *et al.* 2006). Ces expériences ont abouti aux mêmes conclusions que mes travaux et n'ont pas permis de détecter la turbulence en régime Képlerien. Notons néanmoins que ces expériences avaient un nombre de courbure plus élevé que Richard (2001), ce qui pourrait expliquer une partie de ce résultat contradictoire (voir § 50.1). Par ailleurs, les conditions aux limites verticales utilisées par

<sup>20</sup>Ce phénomène est aussi connu sous le nom de « feuille de Stewartson ».



**FIG. 66.** Tracé de la vitesse verticale dans une coupe  $(y, z) = (r, z)$  pour  $Re=6000$  avec les conditions aux limites de Richard (2001) à  $t = 400S^{-1}$ . NB : le rapport d'aspect n'est pas respecté pour des raisons de facilité d'impression.

Ji *et al.* (2006) sont une version améliorée des conditions de Richard (2001), permettant de réduire de manière notable la circulation d'Ekman.

Tous ces résultats tendent à montrer que les expériences de Richard (2001) ont été biaisées par un phénomène parasite pouvant être dû à du bruit de manipulation, un effet de conditions aux limites ou tout autre effet non envisagé jusqu'à présent.

Comme on a pu le voir dans ce chapitre, la turbulence sous-critique dans les disques est un problème sujet à de nombreuses controverses. J'ai essayé de présenter ici mes résultats tout en étudiant la plupart des biais qui sont habituellement discutés. Il va de soit que je n'ai pas pu étudier toutes les possibilités, pour des raisons de temps et de faisabilité numérique. J'espère néanmoins que le lecteur y trouvera un tour d'horizon assez complet pour pouvoir se faire sa propre idée sur la question.





# Partie IV

## Instabilité strato-rotationnelle



# 9

## Instabilité strato-rotationnelle

« La science progresse en indiquant  
l'immensité de l'ignoré. »

— L. Pauwels  
Ce que je crois

### Plan du chapitre

1. Instabilité et stratification .....	124
§ 59. Présentation .....	124
§ 60. Équations de base .....	125
§ 60.1. Approximation de Boussinesq .....	125
§ 60.2. Linéarisation .....	126
§ 61. Domaines de résolution .....	128
2. Solutions Exponentielles .....	129
§ 62. Nature des solutions et conditions aux limites .....	129
§ 62.3. Solutions .....	129
§ 62.4. Conditions aux limites .....	129
§ 63. Résultats .....	131
§ 63.5. Dérivation de la relation de dispersion .....	131
§ 63.6. Analyse .....	131
§ 63.7. Applicabilité dans les disques .....	132
3. Solutions Oscillantes .....	133
§ 64. Décomposition en domaines .....	133
§ 65. Raccordement asymptotique .....	134
§ 66. Dérivation d'une relation de dispersion .....	135
§ 67. Approche numérique de la relation de dispersion .....	137
4. Simulations Numériques .....	139
§ 68. Saturation et conditions aux limites .....	139
5. Discussion .....	140
§ 69. Article de Dubrulle et al. (2005b) .....	140
§ 70. Conclusion .....	141

## 1. Instabilité et stratification

### § 59. Présentation

**L**A STRATIFICATION VERTICALE DES DISQUES est un paramètre supplémentaire pouvant intervenir sur la dynamique des écoulements d'accrétion. En particulier, c'est cette stratification qui fixe l'échelle de longueur macroscopique la plus petite, au moins dans les disques froids. Dans cette partie, nous allons donc nous intéresser au rôle de cette stratification dans la physique des disques, et en particulier, à une instabilité pouvant apparaître dans les milieux stratifiés : l'instabilité strato-rotationnelle (ou SRI).

Cette instabilité n'a été étudiée que récemment dans la communauté astrophysique, mais elle est connue depuis plus de deux décennies en mécanique des fluides. Elle peut apparaître dans les écoulements de Couette plans tournants stratifiés verticalement, alors qu'ils sont localement linéairement stables vis-à-vis du critère de Solberg-Hoiland, valable pour des modes axisymétriques :

$$\frac{1}{R^3} \frac{\partial j^2}{\partial R} - \frac{1}{C_p \rho} \nabla p \cdot \nabla S > 0 \quad (59.199)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} \left( \frac{\partial j^2}{\partial R} \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial j^2}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial R} \right) < 0 \quad (59.200)$$

où l'on a noté  $j$  le moment cinétique,  $C_p$  la capacité calorifique et  $S$  l'entropie du gaz. On pourra reconnaître dans la première équation une extension du critère de Rayleigh  $2\Omega(2\Omega - S) > 0$  (Eq. 49.183). La seconde équation correspond au critère d'instabilité convective de Schwarzschild si l'on suppose  $\Omega = \Omega(R) = R^{-3/2}$  et  $\partial p / \partial z < 0$ , cette dernière égalité étant naturellement vraie dans un disque<sup>21</sup>. On obtient alors le critère classique pour un gaz parfait  $dT/dz + g/c_p > 0$ , où  $T(z)$  est le profil de température,  $g$  est la gravité et  $c_p$  est la capacité calorifique à pression constante.

L'instabilité strato-rotationnelle a été étudiée initialement, sous une forme légèrement différente et sans rotation, par Satomura (1981). Par la suite, une étude approfondie, à la fois analytique et numérique (Yavneh *et al.* 2001), a montré qu'elle apparaissait pour tout écoulement de Couette-Taylor anticyclonique ( $\Omega/S > 0$ ), ce qui en fait un candidat de choix pour expliquer la turbulence dans les disques d'accrétion. La recherche de cette instabilité tant numériquement qu'analytiquement a dans un premier temps été un échec (Rüdiger *et al.* 2002). Par la suite, Brandenburg & Ruediger (2005) ont mis en évidence cette instabilité dans des simulations et ont montré que le transport de moment angulaire se faisait effectivement vers l'extérieur. Il apparaît cependant que son efficacité semble décroître quand le Reynolds augmente, ce qui la rend moins pertinente pour les disques astrophysiques. Dubrulle *et al.* (2005b) ont argumenté, à l'aide d'une analyse WKB et d'un argument énergétique, que cette instabilité n'était pas simplement limitée aux cas des écoulements de Couette-Taylor ou de Couette plans, mais semblait indépendante des conditions aux limites. Ce problème des conditions aux limites a aussi été abordé par Umurhan (2006), en concluant que cette instabilité ne pouvait exister avec des conditions aux limites libres. Remarquons que ce point avait déjà été soulevé par Satomura (1981).

<sup>21</sup>On notera que dans le demi-plan inférieur d'un disque, cette égalité s'inverse, de même que le champ  $g$ , ce qui aboutit finalement au même critère d'instabilité.

Dans cette partie, je vais donc décrire les principales caractéristiques de cette instabilité. En particulier, je m'attacherai à donner un point de vue clair sur le rôle des conditions aux limites, et l'implication de cette instabilité sur la physique des disques. Cette partie, essentiellement analytique, sera ponctuée de quelques résultats numériques.

## § 60. Équations de base

### § 60.1. Approximation de Boussinesq

Dans un premier temps, considérons les équations de base dans le repère local du disque, tel que définit en introduction (§ 9 p. 22) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (60.201)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla P - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + 2\Omega S y e_y + \rho g(z) e_z \quad (60.202)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} P = -P(\gamma - 1) \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (60.203)$$

La stratification verticale est introduite via le terme  $g(z)$ , représentant la force par unité de masse due à la gravité locale. Pour un disque d'accrétion et dans le repère local considéré précédemment, supposé à une distance  $R_0$  de l'objet central, on a au premier ordre en  $z/R_0$  :

$$g(z) = -\frac{GM}{R_0^3} z \quad (60.204)$$

On notera en particulier que les effets de stratifications deviennent non négligeables lorsque l'on s'éloigne du plan médian  $z = 0$ . Dans ce travail, par soucis de simplification, nous ferons l'hypothèse d'une stratification verticale homogène en supposant  $g$  constant. Ceci revient à considérer une portion du disque de hauteur  $h$  centrée en  $z_0$  telle que  $h \ll z_0$ . Étant donné que nous voulons en tirer un transport non négligeable pour la physique de l'accrétion, il faudra se placer dans une zone relativement proche du plan médian, ce qui aboutit à  $h \ll z_0 < H$  où  $H$  est l'échelle de hauteur du disque. Remarquons que cette dernière hypothèse n'a pas d'influence sur le domaine d'existence d'instabilité (Umurhan 2006).

On remarquera que le système d'équations que l'on souhaite résoudre pour étudier cette instabilité est relativement complexe. Il convient alors d'éliminer les phénomènes physiques sans rapport avec l'instabilité que l'on souhaite étudier. On remarquera ainsi que ce système possède plusieurs modes propres, dont un mode acoustique. Comme nous nous intéressons ici à un couplage entre les effets de la force de Coriolis et l'effet inertiel de la stratification, les modes acoustiques sont à éliminer de notre problème. Pour se faire, on utilise l'approximation de Boussinesq, qui revient à fixer  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  sauf pour les effets de pousser d'Archimède. Les implications et limites de cette approximation sont discutées par Spiegel & Veronis (1960), et nous l'utiliserons simplement sous la forme :

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \psi - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + 2\Omega S y e_y + \theta e_z \quad (60.205)$$

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = -u_z N^2 \quad (60.206)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (60.207)$$

où l'on note le terme de pression effective  $\psi = p'/\rho_0$  et le terme de température  $\theta = gT'/T_0$ . Les champs  $\rho_0$ ,  $P_0$  et  $T_0$  sont les états d'équilibre de l'écoulement et les écarts à l'équilibre sont notés avec un prime ( $T'$ ,  $p'$ ). Nous avons de plus introduit la fréquence de Brunt-Väisälä sous la forme :

$$N^2 = (\gamma - 1) \frac{g^2}{c_s^2} + g \partial_z \ln c_s^2 \quad (60.208)$$

où  $c_s$  est la vitesse du son ( $c_s^2 = \gamma P_0 / \rho_0$ ). Cette quantité correspond à la fréquence d'oscillation d'une particule fluide le long de  $z$  lorsqu'elle est déplacée de son état d'équilibre sous l'effet de la force d'Archimède. On pourra ainsi remarquer que la condition de stabilité  $N^2 > 0$  correspond au critère de Schwarzschild discuté précédemment.

Afin d'obtenir un système linéaire, il convient d'écrire le système d'équations précédent en utilisant les déviations de l'écoulement par rapport à l'écoulement laminaire cisailé  $\mathbf{u} = Sy\mathbf{e}_x + \mathbf{v}$ . On obtient alors en notant  $D_t = (\partial_t + Sy\partial_x + \mathbf{v} \cdot \nabla)$  :

$$\begin{aligned} D_t v_x &= -\partial_x \psi + (2\Omega - S)v_y \\ D_t v_y &= -\partial_y \psi - 2\Omega v_x \\ D_t v_z &= -\partial_z \psi + \theta \\ D_t \theta &= -N^2 v_z \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

## § 60.2. Linéarisation

Afin d'étudier l'instabilité linéaire qu'est la SRI, on linéarise le système précédent de manière classique. On introduit alors des conditions aux limites homogènes dans les directions  $x$  et  $z$ , de sorte que l'on puisse utiliser des décompositions de Fourier :

$$\mathbf{X}(x, y, z) = \tilde{\mathbf{X}}(y) \exp [i(\omega t - \alpha x - \beta z)] \quad (60.209)$$

où  $\mathbf{X} = \mathbf{v}, \theta$  ou  $\psi$ . On réécrit alors le système linéarisé précédent sous la forme :

$$\begin{aligned} i\sigma \tilde{v}_x &= i\alpha \tilde{\psi} + (2\Omega - S)\tilde{v}_y \\ i\sigma \tilde{v}_y &= -\partial_y \tilde{\psi} - 2\Omega \tilde{v}_x \\ i\sigma \tilde{v}_z &= i\beta \tilde{\psi} + \tilde{\theta} \\ i\sigma \tilde{\theta} &= -N^2 \tilde{v}_z \\ 0 &= i\alpha \tilde{v}_x - \partial_y \tilde{v}_y + i\beta \tilde{v}_z \end{aligned}$$

avec :

$$\sigma = \omega - Sy\alpha \quad (60.210)$$

Ce système présente la particularité de ne pas pouvoir être simplifié en modes normaux dans la direction  $y$ . Ainsi, une décomposition en modes de Fourier cisailés (voir par exemple Goodman & Balbus 2001) conduit à l'élimination de l'instabilité, ces derniers n'étant pas une base complète de l'espace des solutions du système précédent. L'utilisation de modes de Fourier était justifié par la recherche d'une instabilité *locale*, c'est-à-dire indépendante des conditions aux limites. Dans le cadre de ce travail, on s'intéressera donc au cas le plus général, en incluant les instabilités globales potentielles et en faisant, le cas échéant, des hypothèses sur les conditions aux limites.

On conservera ainsi les équations précédentes sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires en  $y$ . On peut dans un premier temps réduire ce système à la manière de Umurhan (2006), ce qui permet d'obtenir :

$$i\tilde{\psi}\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2\sigma^2}{\sigma^2 - N^2}\right) = -\alpha(2\Omega - S)\tilde{v}_y + \sigma\partial_y\tilde{v}_y \quad (60.211)$$

$$\tilde{v}_y(\sigma^2 - \kappa^2) = i\sigma\partial_y\tilde{\psi} + i2\Omega\alpha\tilde{\psi} \quad (60.212)$$

où l'on a défini la fréquence épicyclique  $\kappa = 2\Omega(2\Omega - S)$ . On peut finalement obtenir une équation en  $\psi$  ou en  $v_y$ . Ces deux équations complémentaires permettent d'obtenir séparément des solutions simples dans différents régimes d'approximation. Dans cette étude, nous allons nous placer dans la limite où  $\sigma \ll N$  et  $\alpha \ll \beta$ . On définira alors une nouvelle variable  $\xi$  de sorte que :

$$\xi = \frac{\beta\sigma}{N\alpha} = O(1) \quad (60.213)$$

Cette variable nous servira dans la suite de variable spatiale, à la place de  $y$ . Elle permettra notamment de réduire la complexité des équations obtenues, et on pourra repasser simplement dans l'espace physique  $y$  une fois les solutions obtenues. On définit de plus un  $\xi$  critique, noté  $\xi_c = \beta\kappa/N\alpha$ , dont l'utilité apparaîtra dans la suite. Dans ce régime, on peut alors réécrire les équations précédentes sous la forme :

$$i\tilde{\psi}\alpha(1 - \xi^2) = -(2\Omega - S)\tilde{v}_y - S\xi\partial_\xi\tilde{v}_y \quad (60.214)$$

$$\frac{\kappa^2}{\xi_c^2}(\xi^2 - \xi_c^2)v_y = i\alpha(-S\xi\partial_\xi\tilde{\psi} + 2\Omega\tilde{\psi}) \quad (60.215)$$

Ce système simplifié permet d'obtenir 2 équations sur  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{v}_y$  ayant chacune une forme intéressante sur les domaines étudiés. Ainsi, bien qu'elles soient *a priori* redondantes, nous les dérivons toutes les deux. Quelques lignes d'algèbre permettent ainsi d'obtenir :

$$\partial_\xi^2\tilde{v}_y + \frac{2\xi}{1 - \xi^2}\partial_\xi\tilde{v}_y = \left[ \frac{2(1 + R_\Omega)}{1 - \xi^2} + R_\Omega(R_\Omega + 1)\left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_c^2} + \frac{1}{\xi_c^2}\right) \right] \tilde{v}_y \quad (60.216)$$

$$\partial_\xi^2\tilde{\psi} + \frac{2\xi}{\xi_c^2 - \xi^2}\partial_\xi\tilde{\psi} = \left[ \frac{2R_\Omega}{\xi_c^2 - \xi^2} + R_\Omega(R_\Omega + 1)\left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_c^2} + \frac{1}{\xi_c^2}\right) \right] \tilde{\psi} \quad (60.217)$$

On pourra alors éliminer les dérivés premières de chacune de ses équations en posant respectivement :

$$\tilde{w}_y = \frac{\tilde{v}_y}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (60.218)$$

$$\tilde{\phi} = \frac{\tilde{\psi}}{\sqrt{\xi_c^2 - \xi^2}} \quad (60.219)$$

de sorte que l'on obtienne finalement les 2 équations :

$$\partial_\xi^2\tilde{w}_y - E_w(\xi)\tilde{w}_y = 0 \quad (60.220)$$

$$\partial_\xi^2\tilde{\phi} - E_\phi(\xi)\tilde{\phi} = 0$$



avec les fonctions  $E_j(\xi)$  de la forme

$$E_w(\xi) = \frac{1 + 2\xi^2}{(1 - \xi^2)^2} + \frac{2(1 + R_\Omega)}{1 - \xi^2} + R_\Omega(R_\Omega + 1) \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_c^2} + \frac{1}{\xi_c^2}\right) \quad (60.221)$$

$$E_\phi(\xi) = \frac{\xi_c^2 + 2\xi^2}{(\xi_c^2 - \xi^2)^2} + \frac{2R_\Omega}{\xi_c^2 - \xi^2} + R_\Omega(R_\Omega + 1) \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_c^2} + \frac{1}{\xi_c^2}\right) \quad (60.222)$$

On fera par la suite l'hypothèse  $\xi_c \gg 1$  afin de négliger le dernier terme des fonctions  $E_j(\xi)$ . Remarquons que l'on pourrait *a priori* se passer de cette approximation sans modifier les conclusions de ce travail en définissant un nouveau  $\xi'_c$  tel que l'on puisse se ramener à un dernier terme de la forme  $1 - (\xi/\xi'_c)^2$ . Enfin, notons que ces équations sont symétriques en  $\xi$ , de sorte que l'on étudiera les solutions pour  $\xi > 0$  sans perdre en généralité.

Comme on peut le remarquer, les singularités apparentes dans les deux équations précédentes ne sont pas présentes au même endroit. En particulier, l'équation sur la pression est plus adaptée à l'étude des solutions au voisinage de 0 ( $\xi \ll \xi_c$ ), alors que l'équation de vitesse permet de comprendre le comportement au voisinage de  $\xi = \xi_c$ . Compte tenu de ces remarques nous allons décomposer le domaine de variation de  $\xi$  en différents sous domaines dans lesquels nous serons capables d'obtenir une solution analytique. On raccordera alors les différentes solutions par la méthode de raccordement asymptotique que je décrirai.

### § 61. Domaines de résolution

Commençons donc par décrire les différents domaines accessibles et les approximations des fonctions  $E_j(\xi)$  correspondantes.

- **Domaine (A) :**  $0 < \xi \ll \xi_c$ . Dans cette région, la forme la plus simple est obtenue pour l'équation en  $\phi$  où l'on trouve :

$$E_\phi(\xi) = R_\Omega(R_\Omega + 1) \quad (61.223)$$

On remarquera que les solutions obtenues pour  $\psi$  avec cette approximation sont des exponentielles. De manière plus générale, quand  $E_j(\xi) > 0$ , on parlera de solution exponentielle, dans le sens où la dérivée seconde et la fonction solution sont de même signe sur le domaine considéré. Remarquons que ce domaine correspond au domaine exponentiel de Umurhan (2006).

- **Domaine (B) :**  $1 \ll \xi < \xi_c$ . Ce domaine correspond à la transition entre le domaine (A) et le domaine  $\xi \sim \xi_c$ . On utilisera ici l'équation en  $\tilde{w}_y$  avec :

$$E_w(\xi) = R_\Omega(R_\Omega + 1) \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_c^2}\right) \quad (61.224)$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, la solution est de type exponentielle sur ce domaine.

- **Domaine (C) :**  $|(\xi_c - \xi)/\xi_c| \ll 1$ . Cette région correspond précisément au changement de signe de  $E_w$  lors du passage au travers de  $\xi_c$ . On pourra alors utiliser l'équation sur  $w_y$  avec :

$$E_w(\xi) = 2R_\Omega(R_\Omega + 1) \left(1 - \frac{\xi}{\xi_c}\right) \quad (61.225)$$

Remarquons que le changement de signe obtenu ici correspond à un changement de la nature de la solution, pour  $\xi > \xi_c$ , la solution adopte un comportement oscillant (la fonction et sa

dérivée seconde sont de signes contraires). Notons que la région  $\xi > \xi_c$  correspond aux solutions oscillantes de Dubrulle *et al.* (2005b).

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux solutions exponentielles, qui ont la forme la plus simple. En particulier, nous allons voir si ces solutions peuvent être sujettes à une instabilité, et à quelle condition.

## 2. Solutions Exponentielles

### § 62. Nature des solutions et conditions aux limites

#### § 62.1. Solutions

Dans le domaine (A), les solutions pour  $\psi$  s'obtiennent de manière évidente. De plus, le système (60.214) permet d'obtenir simplement les solutions pour le champ de vitesse. On obtient alors :

$$\tilde{v}_y(\xi) = \left( \xi \mp \sqrt{\frac{R_\Omega}{R_\Omega + 1}} \right) \exp \left( \pm \xi \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)} \right) \quad (62.226)$$

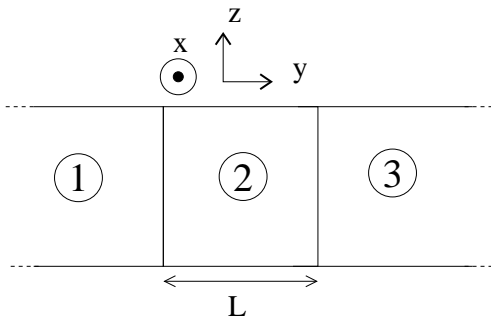
$$\tilde{\psi}(\xi) = \pm \frac{iS}{\alpha} \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)} \exp \left( \pm \xi \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)} \right) \quad (62.227)$$

dans lesquels on a supposé  $R_\Omega < -1$  pour pouvoir se rapprocher du cas Képlerien.

Comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, le problème de la présence ou non d'une instabilité dans cet écoulement semble relié aux conditions aux limites utilisées. En particulier, il semblerait que la présence de conditions aux limites rigides favorise l'apparition de modes instables. Dans cette étude, j'ai donc développé des conditions aux limites plus générales, qui permettent de tester toute une variété de conditions aux limites, en incluant la possibilité de murs.

#### § 62.2. Conditions aux limites

Considérons une section radiale de l'écoulement d'étude, avec de part et d'autre, deux milieux de paramètres physiques différents (Fig. 67). Chaque milieu se voit ainsi caractérisé par son profil de pression, de température, de densité et donc sa fréquence de Brunt-Väisälä  $N$ . On supposera que les milieux encadrant le milieu d'étude sont infinis dans la direction  $y$  opposée à leur frontière. On remarquera de plus que ce type de conditions aux limites peut imiter la présence d'un mur, en supposant que les milieux (1) et (3) aient une densité beaucoup plus importante que le milieu d'étude.



**FIG. 67.** Conditions aux limites utilisées dans l'approche analytique. Le milieu d'étude (2) est entouré de 2 milieux (1) et (3) s'étendant respectivement jusqu'à  $-\infty$  et  $+\infty$ . Les propriétés d'équilibre de chacun des milieux sont *a priori* différentes et permettent de reproduire plusieurs types de conditions aux limites.

Dans la suite, on notera les propriétés d'équilibre en majuscule avec l'indice correspondant au milieu considéré (par ex.  $T_i(z)$ ,  $P_i(z)$ ,  $\rho_i(z)$ ,  $N_i(z)$  avec  $i = 1, 2, 3$ ). Les déviations à l'équilibre seront indexées de la même manière. De plus, par simplicité, on considérera que les milieux (1) et (3) ont les mêmes propriétés d'équilibre.

Comme on le voit sur la figure (67), l'équilibre du système composé des 3 milieux impose l'égalité des pressions aux interfaces. On écrit alors :

$$P_1(z) = P_2(z) \quad (62.228)$$

$$P_2(z) = P_3(z) \quad (62.229)$$

$$\tilde{p}_1(y = -L/2) = \tilde{p}_2(y = -L/2) \quad (62.230)$$

$$\tilde{p}_2(y = L/2) = \tilde{p}_3(y = L/2) \quad (62.231)$$

où l'on a supposé que les interfaces étaient placées en  $y = \pm L/2$ . De plus, comme les milieux (1) et (3) partagent les mêmes propriétés d'équilibre, les équations (62.228) et (62.229) sont équivalentes.

Pour obtenir une condition sur le champ de vitesse, nous allons suivre le mouvement d'une particule fluide au voisinage immédiat de cette interface. Ainsi, on suppose qu'une interface est positionnée en  $y = \zeta(x, z, t)$  et nous suivons une particule infiniment proche de l'interface, ayant pour coordonnées<sup>22</sup>  $(x_0, \zeta_0 + \varepsilon, z_0)$  à  $t = t_0$ . On définit alors un vecteur de déplacement  $\xi_i(t)$ , qui nous permet d'écrire les coordonnées de la particule à tout instant sous la forme  $(x_0 + \xi_{x_i}(t), \zeta_0 + \xi_{y_i}(t), z_0 + \xi_{z_i}(t))$ . Comme la particule est toujours infiniment proche de l'interface à  $t$ , on peut écrire :

$$\zeta(x_0 + \xi_{x_i}(t), z_0 + \xi_{z_i}(t), t) = \zeta_0 + \xi_{y_i}(t) \quad (62.232)$$

En utilisant la définition de la vitesse à partir d'un vecteur déplacement, et l'équation précédente, il vient naturellement :

$$\begin{aligned} v_{y_i}(x_0, \zeta_0, z_0) &\equiv \left( \frac{D\xi_{y_i}}{Dt} \right)_{t=t_0} \\ &\simeq \left( \partial_t \pm S \frac{L}{2} \partial_x \right) \zeta(x_0, z_0, t_0) \end{aligned} \quad (62.233)$$

que l'on écrira pour chaque interface située à  $y = \pm L/2$ . Notons que la dernière égalité est obtenue avec une linéarisation, ce qui n'est pas contraignant dans le cas de notre étude. Comme la position de l'interface ( $\zeta$ ) ne dépend naturellement pas du milieu considéré, cette dernière équation nous permet d'obtenir les relations de continuité recherchées :

$$v_{y_1}(x, -L/2, z) = v_{y_2}(x, -L/2, z) \quad (62.234)$$

$$v_{y_2}(x, L/2, z) = v_{y_3}(x, L/2, z) \quad (62.235)$$

Remarquons que de manière générale, ces relations de passage sont toujours vérifiées tant que la vitesse moyenne de l'écoulement (ici  $Sy_{ex}$ ) est continue au passage à travers l'interface. En pratique, une discontinuité en vitesse tangentielle entraînerait une relation légèrement différente (Eq. 62.233) et engendrerait par exemple une instabilité de Kelvin-Helmholtz.

<sup>22</sup>La variable  $\varepsilon$  peut être soit positive soit négative. Ainsi, on peut suivre indifféremment une particule d'un coté ou de l'autre de l'interface.

### § 63. Résultats

#### § 63.1. Dérivation de la relation de dispersion

Compte tenu de la configuration avec plusieurs milieux utilisée pour cette étude, on réécrit les solutions (62.226) et (62.227) sous la forme :

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{y_i}(y) &= A_i^+ \left( 2\Omega\alpha + k_{F_i}(\omega - Sy\alpha) \right) \exp(k_{F_i}y) \\ &+ A_i^- \left( 2\Omega\alpha - k_{F_i}(\omega - Sy\alpha) \right) \exp(-k_{F_i}y)\end{aligned}\quad (63.236)$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_i(y) &= iA_i^+ \frac{\rho_i}{\alpha} \kappa^2 \exp(k_{F_i}y) \\ &+ iA_i^- \frac{\rho_i}{\alpha} \kappa^2 \exp(-k_{F_i}y)\end{aligned}\quad (63.237)$$

où l'on a utilisé les équations (60.210) et (60.213) pour définir le nombre d'onde de Froude  $k_F = \beta\kappa/N$ , ce dernier étant dépendant du milieu considéré via la fréquence de Brunt-Väisälä.

Remarquons que les solutions précédentes ne sont *a priori* pas valables pour  $\xi \rightarrow \pm\infty$  car on ne vérifie alors plus l'approximation  $|\sigma| \ll N$ . En pratique, il faudrait donc calculer les solutions en  $\pm\infty$  et effectuer le raccordement asymptotique jusqu'aux solutions (63.236) et (63.237). Ce raccordement n'ayant pu être fait dans le cadre de cette thèse, je me contenterai de supposer que les solutions (63.236) et (63.237) qui tendent vers 0 en  $\pm\infty$  se raccordent aux solutions asymptotiques qui vérifient effectivement ces limites.

Les conditions aux limites (62.230), (62.231), (62.234) et (62.235), ainsi que les conditions d'équilibre hydrostatiques (62.228) et (62.229) permettent alors d'obtenir la relation de dispersion (voir annexe C) :

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_s^2 \\ &- \frac{2(1-r^{2/3})}{k_{F_2}G} \alpha\omega_c\omega_s (r \sinh(k_{F_2}L) + \cosh(k_{F_2}L)) \\ &+ \frac{\omega_c^2\alpha^2(1-r^{2/3})^2}{k_{F_2}^2G} \sinh(k_{F_2}L)\end{aligned}\quad (63.238)$$

où l'on a posé  $r = (\rho_2/\rho_1)^{3/2}$  (contraste de densité) ;  $\omega_c = 2\Omega$  ;  $\omega_s = SL\alpha/2$  et :

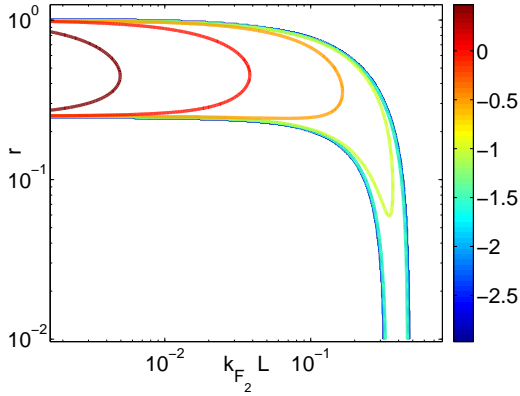
$$G = (r^2 + 1) \sinh(k_{F_2}L) + 2r \cosh(k_{F_2}L)$$

Il convient alors de faire une analyse de cette relation de dispersion afin de pouvoir conclure sur le rôle possible de cette instabilité dans les disques.

#### § 63.2. Analyse

L'analyse de cette relation de dispersion montre que seul le second terme est susceptible de donner lieu à une instabilité. Dans le cas des disques ( $R_\Omega < 0$ ), l'instabilité n'apparaîtra que lorsque  $r < 1$ , c'est-à-dire lorsque le milieu est entouré de 2 zones plus denses. On pourra remarquer que dans le cas  $r = 1$ , correspondant à 3 milieux de même nature et donc un système homogène, l'instabilité disparaît (ce point rejoint une des conclusions de Umurhan 2006).

Dans le cas astrophysique, il est important de connaître les longueurs d'ondes pour lesquelles un disque pourrait être instable. Étant donné la complexité de la relation de dispersion, nous avons tracé  $\Im m(\omega)$  en fonction de  $k_{F_2}$  et  $r$  (Fig. 68). On retrouve sur ce graphique le fait que



**FIG. 68.** Tracé de  $\log(\Im(\omega)/S)$  d'après la relation de dispersion (63.238) dans le cas  $R_\Omega = -4/3$ . On remarque que l'instabilité disparaît pour  $r > 1$  et que les plus grands nombres d'onde verticaux accessibles correspondent à  $r \rightarrow 0$ .

l'instabilité n'apparaît que pour  $r < 1$ . De plus, on voit que le plus grand  $k_{F_2}$  accessible correspond à la limite  $r \rightarrow 0$ .

Ce cas critique est analysable analytiquement. En effet, la relation de dispersion se réduit à :

$$\omega^2 = \omega_s^2 \left( \tanh\left(\frac{k_{F_2} L}{2}\right) + \frac{2R_\Omega}{k_{F_2} L} \right) \left( \coth\left(\frac{k_{F_2} L}{2}\right) + \frac{2R_\Omega}{k_{F_2} L} \right) \quad (63.239)$$

On retrouve alors la relation de Umurhan (2006) dans le cas de conditions aux limites rigides. Dans le cas astrophysique ( $R_\Omega = -4/3$ ), on montre alors que l'instabilité apparaît pour des nombres d'ondes de Froude tels que :

$$2,07 < k_{F_2} L < 2,96 \quad (63.240)$$

### § 63.3. Applicabilité dans les disques

Le critère d'instabilité précédent doit être transposé dans les disques astrophysiques avant de pouvoir parler d'une éventuelle instabilité active. Comme nous l'avons dit, la stratification dans les disques est variable en fonction de la hauteur  $z$ . Cependant, on trouve comme ordre de grandeur une stratification typique telle que (Dubrulle *et al.* 2005b) :

$$N/\Omega \simeq 0,3 \quad (63.241)$$

L'instabilité devant être confinée dans le disque, la longueur d'onde verticale accessible est limitée par l'échelle de hauteur  $H$ . En particulier, on a en première approximation  $\beta > 2\pi/H$ . On peut alors réécrire la borne supérieure de (63.240) comme un critère reliant  $L$  et  $H$ , en prenant en compte la stratification (63.241) :

$$L < 0,14H \quad (63.242)$$

Ainsi, pour qu'apparaisse cette instabilité sous la forme de modes exponentiels, il faut que la distance entre 2 interfaces radiales successives soit plus petite qu'un dixième de l'échelle de hauteur. On peut donc imaginer que cette instabilité puisse se développer dans des anneaux étroits de faible densité (condition  $r < 1$ ), tels que la trace laissée dans le disque par une planète en formation. En revanche, il semble très peu probable d'observer de telles structures de manière uniforme dans le disque. Ainsi, l'instabilité strato-rotationnelle, bien que potentiellement intéressante pour les mécanismes de formation planétaire, ne semble pas permettre d'expliquer le transport observé dans les disques, du moins avec les solutions exponentielles.

### 3. Solutions Oscillantes

#### § 64. Décomposition en domaines

Les solutions oscillantes sont nettement plus difficiles à obtenir analytiquement. Ces solutions ont été décrites numériquement par Yavneh *et al.* (2001), puis Dubrulle *et al.* (2005b) ont tenté de les étudier analytiquement. Certains aspects de cette dernière analyse sont cependant discutables, et nous reviendrons sur ces résultats dans la suite. Pour obtenir ces modes, il convient de faire une résolution des équations (60.220) dans chacun des domaines décrit ci-dessus. Je ne reviendrai pas sur le domaine (A) pour lesquels les solutions ont été étudiées dans la section précédente.

• **Domaine (B)..** Dans ce domaine, la fonction  $E_w$  est lentement variable et ne change pas de signe, ce qui nous permet d'utiliser une solution WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin). Par simplicité nous noterons  $\bar{\xi} = \xi/\xi_c$  et  $\lambda = \xi_c \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)}$ , ce qui nous permet d'écrire l'équation (63.241) sous la forme :

$$\partial_{\bar{\xi}}^2 \tilde{w}_y - \lambda^2 (1 - \bar{\xi}^2) \tilde{w}_y(\bar{\xi}) = 0 \quad (64.243)$$

En pratique, l'approximation WKB consiste à considérer une fonction test composée d'une onde avec une phase à variation rapide, et d'une enveloppe à variation lente de la forme :

$$\tilde{w}_y = B(\bar{\xi}) \exp(\phi(\bar{\xi})) \quad (64.244)$$

En injectant cette solution dans l'équation (64.243) et en utilisant l'approximation précédente ( $B'/B \ll \phi'$ ), on obtient :

$$\tilde{w}_y = \frac{B^\varepsilon}{(1 - (\xi/\xi_c)^2)^{1/4}} \exp\left(\varepsilon \int_0^{\xi/\xi_c} \lambda \sqrt{1 - x^2} dx\right) \quad (64.245)$$

où  $\varepsilon = \pm 1$  et  $B^\varepsilon$  sont 2 constantes inconnues. Remarquons que cette solution n'est pas valide au voisinage de  $\xi = \xi_c$  car l'approximation WKB est alors violée. On ne peut donc atteindre directement le domaine oscillant avec cette solution.

• **Domaine (C)..** Dans ce domaine, la solution traverse la singularité  $\xi = \xi_c$  et passe donc d'un comportement exponentiel à un comportement oscillant. Pour isoler ce point, on définit la variable  $\zeta$  de telle sorte que  $\zeta = 0$  correspond au point  $\xi = \xi_c$  :

$$\zeta = -\left(2\xi_c^2 R_\Omega(R_\Omega + 1)\right)^{1/3} (\xi/\xi_c - 1) \quad (64.246)$$

En utilisant la variable  $\zeta$ , l'équation (63.241) et l'expression (61.225) se simplifient sous la forme :

$$\partial_\zeta^2 \tilde{w}_y - \zeta \tilde{w}_y = 0 \quad (64.247)$$

Cette équation caractéristique a pour solution les fonctions d'Airy  $Ai(\zeta)$  et  $Bi(\zeta)$ . La solution formelle peut alors s'écrire, en reprenant les notations initiales :

$$\tilde{w}_y = C^- Ai\left[\left(2\xi_c^2 R_\Omega(R_\Omega + 1)\right)^{1/3} (1 - \xi/\xi_c)\right] + \quad (64.248)$$

$$C^+ Bi\left[\left(2\xi_c^2 R_\Omega(R_\Omega + 1)\right)^{1/3} (1 - \xi/\xi_c)\right] \quad (64.249)$$

$C^+$  et  $C^-$  étant 2 constantes inconnues.

### § 65. Raccordement asymptotique

Afin de raccorder les différentes solutions dans chacun des domaines, nous allons utiliser la méthode des raccordements asymptotiques. Pour se faire, on prend la limite de chaque solution et on raccorde alors les limites des solutions en ajustant les constantes  $A^\pm$ ,  $B^\pm$  et  $C^\pm$ . Si les domaines choisis sont cohérents, ce type de raccordement doit se faire sans difficulté.

• **Raccordement de (A) et (B)..** En reprenant la solution du domaine (A) (62.226) avec  $\tilde{w}_y = \tilde{v}_y / \sqrt{1 - \xi^2}$ , il vient naturellement :

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{w}_y(\xi) = A^\pm \exp\left(\pm \xi \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)}\right)$$

De même, la solution du domaine (B) (64.245) nous donne :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \tilde{w}_y(\xi) = B^\pm \exp\left(\pm \xi \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)}\right)$$

Le raccordement asymptotique du domaine (A) et (B) nous permet donc d'obtenir simplement :

$$A^\pm = B^\pm \quad (65.250)$$

• **Raccordement de (B) et (C)..** La limite  $\xi \rightarrow \xi_c^-$  est plus difficile à obtenir. Remarquons tout d'abord que :

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_c^-} \int_0^{\xi/\xi_c} \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_c}\right)^{3/2}$$

Cette égalité nous permet alors d'écrire la solution du domaine (B) dans la limite  $\xi \rightarrow \xi_c^-$  sous la forme :

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_c^-} \tilde{w}_y(\xi) = B^\pm \frac{\exp(\pm \lambda \frac{\pi}{4})}{2^{1/4} (1 - \xi/\xi_c)^{1/4}} \exp\left[\mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \lambda \left(1 - \frac{\xi}{\xi_c}\right)^{3/2}\right] \quad (65.251)$$

De la même manière, les limites asymptotiques des fonctions d'Airy nous permettent d'écrire dans la limite  $\xi \rightarrow \infty$  la solution (64.248) du domaine (C) sous la forme :

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{w}_y(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} [2\xi_c^2 R_\Omega (R_\Omega - 1)]^{1/12} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_c}\right)^{1/4}} \times \\ &\left( C^+ \exp\left[\frac{2\sqrt{2}}{3} \lambda \left(1 - \frac{\xi}{\xi_c}\right)^{3/2}\right] + \right. \\ &\left. \frac{1}{2} C^- \exp\left[-\frac{2\sqrt{2}}{3} \lambda \left(1 - \frac{\xi}{\xi_c}\right)^{3/2}\right] \right) \end{aligned} \quad (65.252)$$

Pour finir, la comparaison des solutions (65.251) et (65.252) nous donne par identification le raccordement asymptotique :

$$C^+ = \mu \exp\left(-\frac{\lambda\pi}{4}\right) B^- \quad (65.253)$$

$$C^- = 2\mu \exp\left(\frac{\lambda\pi}{4}\right) B^+ \quad (65.254)$$

$$\text{avec } \mu = \frac{\sqrt{\pi} \left(2\xi_c^2 R_\Omega (R_\Omega - 1)\right)^{1/12}}{2^{1/4}} \quad (65.255)$$

Cette dernière égalité nous permet alors d'obtenir l'expression de la solution au travers des domaines (A), (B) et (C).



### § 66. Dérivation d'une relation de dispersion

Compte tenu de la complexité des solutions apparaissant dans le domaine (C), la dérivation d'une relation de dispersion est relativement fastidieuse. Dans un but de simplification, nous allons utiliser des conditions aux limites rigides, positionnées en  $y = L_-$  et  $y = L_+$ . De plus on posera :

$$\xi_{\pm} = -\frac{S\beta L_{\pm}}{N} \quad (66.256)$$

$$\xi_{\omega} = \frac{\beta\omega}{N\alpha} \quad (66.257)$$

de sorte qu'au niveau des murs gauche et droit, on puisse écrire  $\xi = \xi_{\pm} + \xi_{\omega}$ . Enfin, nous allons utiliser les comportements asymptotiques des fonctions d'Airy dans le domaine oscillant :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Ai(-x) \sim \frac{\sin\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} \quad (66.258)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Bi(-x) \sim \frac{\cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} \quad (66.259)$$

On supposera alors que le mur gauche (indice -) se situe dans le domaine (A), alors que le mur droit est dans la partie oscillante du domaine (C). L'application de ces conditions aux limites aboutit alors au système :

$$0 = A^+ \left( \xi_- + \xi_{\omega} - \sqrt{\frac{R_{\Omega}}{R_{\Omega} + 1}} \right) \exp \left[ (\xi_- + \xi_{\omega}) \sqrt{R_{\Omega}(R_{\Omega} + 1)} \right] \quad (66.260)$$

$$+ A^- \left( \xi_- + \xi_{\omega} + \sqrt{\frac{R_{\Omega}}{R_{\Omega} + 1}} \right) \exp \left[ -(\xi_- + \xi_{\omega}) \sqrt{R_{\Omega}(R_{\Omega} + 1)} \right]$$

$$0 = A^+ 2 \exp\left(\frac{\lambda\pi}{4}\right) \sin\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda\left(\frac{\xi_+ + \xi_{\omega}}{\xi_c} - 1\right)^{3/2} - \frac{1}{4}\pi\right] \quad (66.261)$$

$$A^- \exp\left(\frac{-\lambda\pi}{4}\right) \cos\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda\left(\frac{\xi_+ + \xi_{\omega}}{\xi_c} - 1\right)^{3/2} - \frac{1}{4}\pi\right]$$

Une solution non triviale est alors trouvée en résolvant l'équation de dispersion en  $\xi_{\omega}$  que l'on écrira sous la forme compacte :

$$\mathcal{D}(\xi_-, \xi_+, \xi_{\omega}) = \varepsilon E Q^- \cos(\Delta) - 2Q^+ \sin(\Delta) = 0 \quad (66.262)$$



où l'on a utilisé les expressions suivantes :

$$Q^\pm = \xi_- + \xi_\omega \pm \sqrt{\frac{R_\Omega}{R_\Omega + 1}} \quad (66.263)$$

$$\Delta = \Gamma P^3 - \frac{1}{4}\pi \quad (66.264)$$

$$\Gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda \quad (66.265)$$

$$\varepsilon = \exp\left[-\frac{\lambda\pi}{2}\right] \quad (66.266)$$

$$E = \exp\left[2(\xi_- + \xi_\omega)\sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)}\right] \quad (66.267)$$

$$P = \left(\frac{\xi_+ + \xi_\omega}{\xi_c} - 1\right)^{1/2} \quad (66.268)$$

La résolution de cette équation en terme de  $\xi_\omega$ , qui permettrait d'obtenir les régimes d'instabilité est loin d'être évidente. On va donc réaliser une série d'approximations afin d'obtenir le régime d'instabilité recherché. On suppose tout d'abord que  $|\xi_\omega|$  est petit. En effectuant un développement à l'ordre 2 de  $\mathcal{D}$  par rapport à  $\xi_\omega$ , il vient alors :

$$\xi_\omega = \frac{-\mathcal{D}' \pm \sqrt{\mathcal{D}'^2 - 2\mathcal{D}''\mathcal{D}}}{\mathcal{D}''} \quad (66.269)$$

avec  $\mathcal{D}' = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \xi_\omega}$ . L'instabilité sera alors obtenue lorsque la valeur sous la racine devient négatif. Remarquons de plus que le calcul de  $\mathcal{D}$  a été fait dans le régime  $\xi_c \gg 1$  ce qui implique  $\varepsilon \ll 1$ . On effectue donc également un développement par rapport à  $\varepsilon$ . Ainsi, en posant :

$$\mathcal{D}(\xi_-, \xi_+, \xi_\omega) = \varepsilon \mathcal{F}(\xi_-, \xi_+, \xi_\omega) - \mathcal{G}(\xi_-, \xi_+, \xi_\omega) \quad (66.270)$$

et en développant l'expression (66.269) à l'ordre 0 en  $\varepsilon$ , il vient :

$$\xi_\omega = \frac{-\mathcal{G}' \pm \sqrt{\mathcal{G}'^2 - 2\mathcal{G}''\mathcal{G}}}{\mathcal{G}''} \quad (66.271)$$

Remarquons tout d'abord que l'on peut choisir arbitrairement  $\mathcal{G}' = 0$ . En effet, on additionne ainsi à  $\xi_\omega$  une constante réelle, ce qui revient physiquement à une translation des murs selon l'axe  $y$  et donc à un changement d'origine du référentiel. On écrira donc cette contrainte sous la forme :

$$\sin(\Delta) + \frac{3\Gamma}{2\xi_c} Q_+ P \cos(\Delta) = 0 \quad (66.272)$$

De plus, on a :

$$\mathcal{G}'' = \frac{3\Gamma}{2\xi_c} Q_+ P \cos(\Delta) \left( \frac{2}{Q_+} + \frac{1}{2P^2\xi_c} \right) - \frac{9\Gamma^2}{4\xi_c^2} Q_+ P^2 \sin(\Delta) \quad (66.273)$$

Ce qui, combiné à la contrainte (66.272) nous permet d'écrire :

$$\xi_\omega = \sqrt{\frac{4}{Q_+^2} + \frac{1}{Q_+\xi_c} + \frac{9\Gamma^2}{2\xi_c^2} P^2} \quad (66.274)$$

Dans la limite utilisée jusqu'ici ( $\xi_c \gg 1$ ), il apparaît donc que le développement à l'ordre 0 ne permet pas d'obtenir une instabilité. Pour obtenir l'éventuelle instabilité à l'ordre suivant, il faut donc annuler la contribution à  $\xi_\omega$  de l'ordre 0. On posera donc :

$$\mathcal{G}(\xi_-, \xi_+, 0) = 0 \quad (66.275)$$

Cette contrainte, combinée avec la contrainte (66.272) nous impose alors :

$$Q_+ = 0 \quad \text{et} \quad \sin(\Delta) = 0 \quad (66.276)$$

Ces contraintes nous fixant la position des murs, il reste à vérifier que l'on peut effectivement trouver un régime instable dans cette configuration. Pour cela, on développe (66.269) à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  en tenant compte des contraintes précédente. Il vient alors à l'ordre le plus bas :

$$\xi_\omega = \pm \varepsilon^{1/2} \sqrt{2 \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}''}} \quad (66.277)$$

que l'on écrira, en utilisant (66.274), sous la forme :

$$\xi_\omega = \pm \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{EQ - \xi_c}{3\Gamma P}} \quad (66.278)$$

Cette dernière relation entraîne nécessairement la présence d'une instabilité. En effet, la contrainte  $Q_+ = 0$  entraîne  $\xi_- = -\sqrt{R_\Omega/(R_\Omega + 1)}$  et  $Q_- = -2\sqrt{R_\Omega/(R_\Omega + 1)}$ . On retrouve donc bien un régime d'instabilité au voisinage de  $Q_+ = 0$  et  $\sin(\Delta) = 0$ . En reprenant les notations initiales et en utilisant le nombre de Froude épicyclique  $Fe = \kappa/N$  et en notant  $n$  le numéro du nœud du sinus utilisé pour satisfaire (66.276), on écrit le taux de croissance sous la forme :

$$\frac{\Im(\omega)}{\kappa} = 3^{-1/6} R_\Omega^{1/12} (R_\Omega + 1)^{-5/12} \left( \frac{\alpha}{Fe\beta} \right)^{5/6} \frac{\exp \left[ -\frac{\pi\beta}{2\alpha} Fe \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)} - R_\Omega \right]}{\left[ (n + \frac{1}{4})\pi \right]^{1/6}} \quad (66.279)$$

### § 67. Approche numérique de la relation de dispersion

On l'a vu précédemment, la dérivation d'une relation de dispersion pour le régime oscillant est complexe et fait intervenir de nombreuses approximations. Nous avons donc voulu effectuer une approche numérique de ce problème afin de vérifier les résultats analytiques. Pour ce faire, nous résolvons dans un premier temps, numériquement, l'équation (60.220) dans le cas générique (sans décomposition en domaines) avec une méthode d'intégration d'équations différentielles ordinaires pour  $\xi \in \mathbb{R}$ . Ceci nous permet de trouver deux solutions linéairement indépendantes que l'on notera  $\mathcal{S}_1(\xi)$  et  $\mathcal{S}_2(\xi)$ . On utilise alors les conditions aux limites rigides que l'on positionne en  $\xi_-$  et  $\xi_+$  de la même manière que dans le chapitre précédent. L'existence d'une solution non triviale à ce système impose alors :

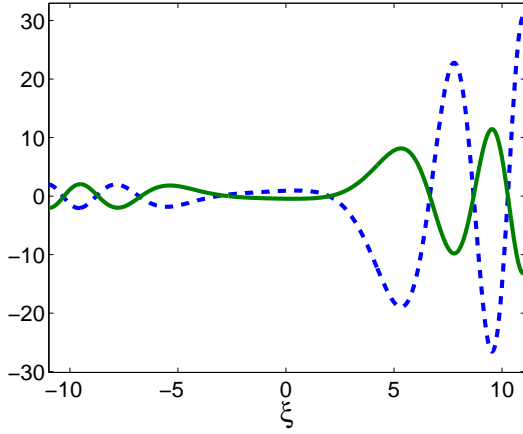
$$\mathcal{D}_n(\xi_+, \xi_-, \xi_\omega) = \mathcal{S}_1(\xi_+ + \xi_\omega) \mathcal{S}_2(\xi_- + \xi_\omega) - \mathcal{S}_1(\xi_- + \xi_\omega) \mathcal{S}_2(\xi_+ + \xi_\omega) = 0 \quad (67.280)$$

où l'on a supposé que  $\xi_\omega$  est réel. Compte tenu de la forme de l'équation différentielle utilisée, la solution doit être une fonction holomorphe sur le domaine de résolution. Ainsi, si l'on suppose à présent que  $\xi_\omega$  est complexe, et  $\Im(\xi_\omega) \ll 1$ , on obtient à l'ordre le plus bas, de la même manière que précédemment :

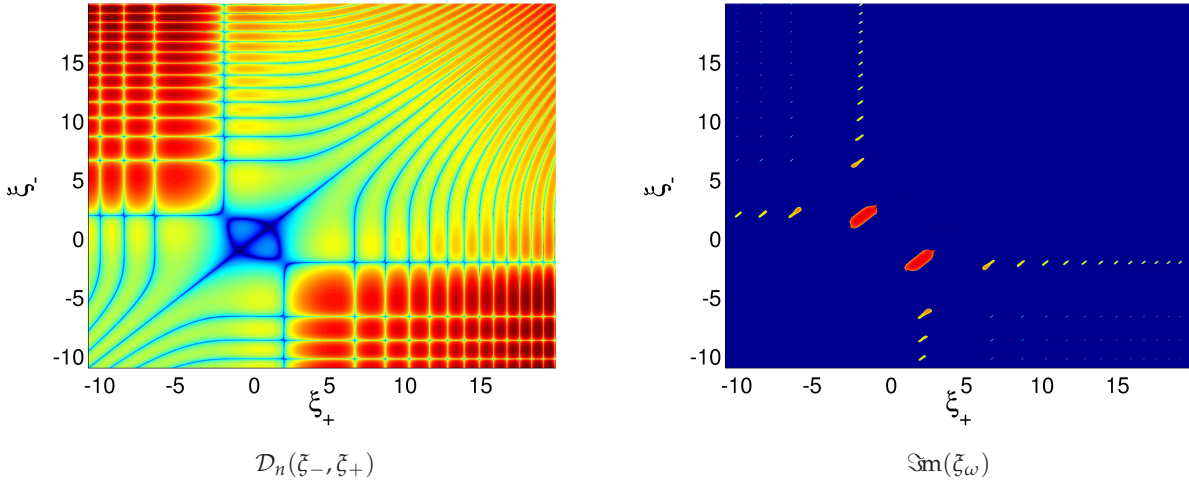
$$\Im(\xi_\omega) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\mathcal{D}_n \mathcal{D}_n'' - \mathcal{D}_n'^2}}{\mathcal{D}_n''} & \text{si } 2\mathcal{D}_n \mathcal{D}_n'' - \mathcal{D}_n'^2 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (67.281)$$

avec  $\mathcal{D}_n' = \partial \mathcal{D}_n / \partial \xi_\omega$ .

A titre d'exemple, j'ai effectué la procédure décrite ci-dessus pour  $\xi_c = 3$  et  $R_\Omega = -4/3$ . On trouvera sur la figure (69) les solutions  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  en fonction de  $\xi$ . A partir de ces solutions, j'ai



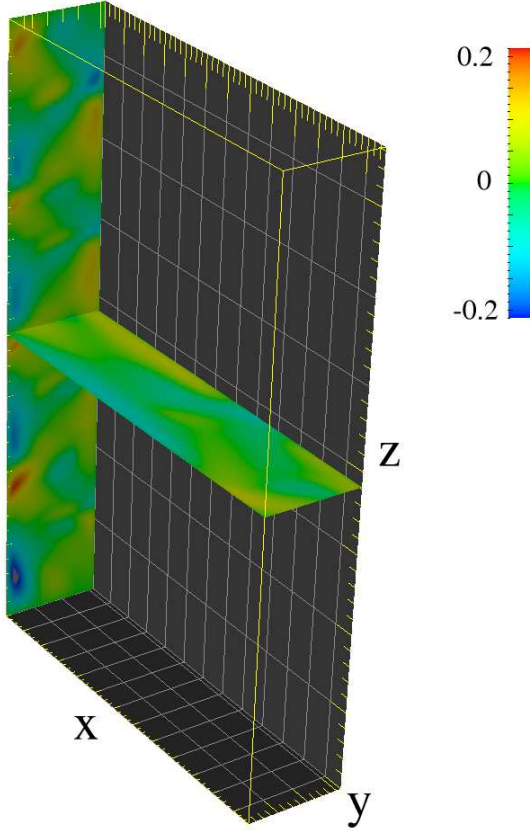
**FIG. 69.** Tracé des solutions numériques  $S_1$  et  $S_2$  en fonction de  $\xi$  pour  $\xi_c = 3$  et  $R_\Omega = -4/3$ . On remarque le domaine exponentiel au voisinage de  $\xi = 0$  et les oscillations pour  $|\xi| > 3$ .



**FIG. 70.** Tracé du déterminant  $\mathcal{D}_n(\xi_-, \xi_+)$  et du taux de croissance  $\Im m(\xi_\omega)$  d'après nos solutions numériques. On remarque que l'instabilité apparaît lorsque deux courbes d'annulation de  $\mathcal{D}_n$  se trouvent en rapprochement maximal. Ce résultat est similaire aux contraintes du résultat analytique  $Q_+ = 0$  et  $\sin(\Delta) = 0$ .

tracé  $\mathcal{D}_n(\xi_-, \xi_+, 0)$  et  $\Im m(\xi_\omega)$  obtenus d'après (67.281) dans l'espace  $(\xi_-, \xi_+)$  sur la figure (70). On remarque sur cette figure la présence de courbes d'annulation de  $\mathcal{D}_n$  qui semblent se couper en certains points. Un examen attentif montre cependant que les courbes d'annulation ne font que se rapprocher et bifurquent à angle droit, sans se couper. De plus, les zones d'instabilité se trouvent au voisinage des points de bifurcation, comme le montre la figure de droite.

Ce résultat n'est pas sans rappeler la contrainte d'annulation que nous avons montré analytiquement  $Q_+ = 0$  et  $\sin(\Delta) = 0$ . Avec les valeurs numériques utilisées pour les solutions précédentes, la condition  $Q_+ = 0$  correspond à  $\xi_- = -4/3$  et  $\sin(\Delta) = 0$  à  $\xi_+ = 5,89 ; 8,24 ; 10,25$ . On peut vérifier sur la figure (70) que chacun de ces points correspondent effectivement à une région d'instabilité. Ainsi, les solutions analytiques instables oscillantes que nous avons trouvées correspondent à la branche  $(\xi_- = -4/3, \xi_+ > 5)$  visible sur la figure. On pourra de plus vérifier que les solutions instables au voisinage de  $(\xi_+ = 4/3, \xi_- = -4/3)$  correspondent aux solutions exponentielles étudiées dans la section précédente.



**FIG. 71.** Mise en évidence de la SRI dans un écoulement de Couette plan stratifié verticalement. Tracé de  $v_z$  pour  $F = 1.54$ ,  $R_\Omega = -4/3$  et  $Re = 3000$ . La structure observée est stationnaire et correspond au régime d'instabilité décrit par les modes exponentiels.

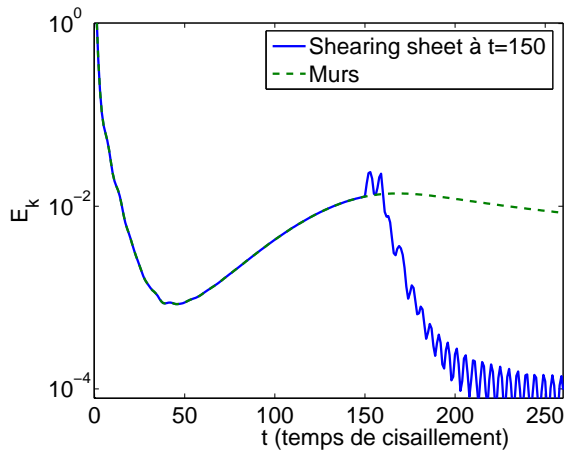
On remarquera aussi d'autres familles d'instabilités oscillant des deux cotés pour  $\xi_+ > 5$  et  $\xi_- < -5$ . Notons enfin que cette instabilité n'apparaît que lorsque  $\xi_+\xi_- < 0$  ce qui correspond à une solution passant nécessairement par  $\xi = 0$ . Ce point avait été remarqué par Yavneh *et al.* (2001) et semble vérifié de manière plus générale ici. Il serait intéressant de pouvoir fournir une explication pour pouvoir en tirer un critère plus général d'instabilité.

On vérifie de plus ici que les solutions exponentielles ne sont qu'un cas particulier que l'on peut étudier facilement analytiquement d'une grande famille de solutions instables, qui sont généralement oscillantes. Je n'ai pas effectué le calcul dans le cas de conditions aux limites plus générales telles que celles utilisées pour les modes exponentiels. Il semble cependant fort probable que les modes oscillants, tous comme les modes exponentiels, nécessiteront des conditions aux limites rigides pour être instables et donneront des contraintes sur le disque similaires à ces derniers.

## 4. Simulations Numériques

### § 68. Saturation et conditions aux limites

Afin de tester les résultats analytiques, j'ai effectué quelques simulations de cette instabilité avec le code aux différences finies. Le système d'équations différentielles non linéaires complet du système a ainsi été traité, dans une boîte de taille  $L_x = 10$ ,  $L_y = 1$ ,  $L_z = 15$  et une résolution de  $128 \times 64 \times 192$ . J'ai de plus ajouté une viscosité dont le Reynolds associé est fixé à 3000. Le nombre de Froude est fixé à 1.54 et je me place au régime képlerien  $R_\Omega = -4/3$ . Les conditions aux limites sont périodiques en  $x$ , shearing-sheet ou murs en  $y$ , et libres en  $z$ .



**FIG. 72.** Remplacement des conditions aux limites rigides par des conditions aux limites shearing sheet dans une simulation ayant développé la SRI. On voit nettement que l'instabilité disparaît après de brèves oscillations à  $t = 150$ .

Les simulations avec murs montrent assez rapidement l'apparition de l'instabilité (Fig. 71) sous forme d'une structure stationnaire, apparemment peu modifiée par les interactions non linéaires. Le transport obtenu est assez faible :  $\langle v_x v_y \rangle \simeq 10^{-3} S^2 L_y^2$ . Par ailleurs, on remarquera que dans le régime de paramètres de la simulation et d'après (63.240), les modes exponentiels sont instables pour une longueur d'onde verticale  $\lambda_z$  telle que :

$$3,25 < \frac{\lambda_z}{L_y} < 4,67 \quad (68.282)$$

ce qui correspond grossièrement à 1/4 de la taille verticale de la boîte de simulation. On pourra vérifier facilement que la structure observée sur la figure (71) correspond à ce régime d'instabilité, la simulation semble donc dominée par les modes exponentiels.

Une fois l'instabilité développée dans une simulation, il peut être intéressant de modifier les conditions aux limites, afin de remplacer les murs par des conditions aux limites correspondant mieux à la physique des disques d'accrétion : les conditions shearing sheet. J'ai effectué un tel test sur la simulation de la figure (71). Pour ce faire, je laisse l'instabilité se développer jusqu'à  $t = 150 S^{-1}$ . A cet instant, les murs dans la direction  $y$  sont remplacés par des conditions aux limites shearing sheet. Le tracé de l'énergie cinétique turbulente (72) montre clairement qu'après une brève relaxation oscillante due au changement des conditions aux limites, l'écoulement retourne rapidement dans un état laminaire. Ce point conforte l'une des conclusions obtenue précédemment : l'existence de la SRI semble reliée à la présence de murs, et son éventuelle existence dans les disques est reliée à la présence de structures radiales *a priori* difficiles à former.

## 5. Discussion

### § 69. Article de Dubrulle *et al.* (2005b)

Comme on l'a vu, nos résultats sont en contradiction avec les résultats de Dubrulle *et al.* (2005b). En particulier, les conditions aux limites qui ne semblent avoir qu'un impact faible sur l'instabilité d'après Dubrulle *et al.* (2005b), ont un rôle très important dans notre étude. Pour expliquer cette différence, reprenons les arguments de cet article.

- **Argument énergétique.** Le premier argument avancé est un argument de minimisation énergétique. Ce dernier donne une condition suffisante de stabilité dans la limite étudiée. Dans

ce cas, il est montré que la condition de stabilité est  $R_\Omega > 0$ . Comme il est signalé dans l'article, cet argument ne permet pas de conclure à l'existence d'une instabilité dans le cas  $R_\Omega < 0$ .

- **Étude WKB..** L'étude WKB effectuée par Dubrulle *et al.* (2005b) est similaire à celle que nous avons effectuée dans le domaine (B). Elle leur permet d'obtenir les solutions exponentielles dans le cas  $\xi \ll \xi_c$ , identiques à celle de notre étude. Cependant, il n'est pas montré que ces modes sont instables pour des conditions aux limites quelconques, et seule une référence aux modes exponentiels de Yavneh *et al.* (2001), étudiés avec des conditions aux limites rigides, est fournie pour justifier l'instabilité.

Cette étude WKB leur permet aussi de mettre en évidence des modes oscillants. Pour ces modes, Dubrulle *et al.* (2005b) se placent dans la limite  $|\sigma^2 - N^2| \ll N^2$  (passage de l'équation (36) à (37) de l'article). Il se trouve que dans ce domaine, l'approximation WKB proposée est fautive, car l'enveloppe de la solution obtenue varie beaucoup plus rapidement que sa phase (équation (41) de l'article). Les solutions oscillantes de Dubrulle *et al.* (2005b) ne sont donc pas valides.

De plus, une relation de dispersion est obtenue à partir de ces modes oscillants en imposant une condition aux limites de type mur ( $v_y = 0$ ) ou libre ( $P = 0$ ). Cette relation ne permettant pas d'obtenir une expression analytique de l'instabilité, des modes « neutres » ( $\Im(\omega) = 0$ ) sont recherchés. Remarquons cependant qu'il ne s'agit pas ici de modes neutres correspondant à un seuil d'instabilité car aucun mode instable n'est mis en évidence dans cette relation de dispersion. De plus, comme ces solutions ne passent pas par  $\xi = 0$ , on s'attend à obtenir uniquement des modes stables (voir § 67).

- **Étude Numérique.** L'étude numérique effectuée dans cet article est basée sur la résolution du système d'équations linéarisé, en incluant une dissipation visqueuse et une conductivité thermique. Nous ne rentrerons pas dans le détail de la procédure numérique utilisée, mais retenons simplement que les conditions aux limites utilisées dans la direction  $y$  sont de type *stress-free* et impliquent donc  $v_y = 0$  sur les bords. Cette étude numérique est donc effectuée avec une sous classe des conditions aux limites rigides.

On le comprend donc, aucun des arguments avancés dans cet article ne permet d'affirmer que la SRI apparaît indépendamment des conditions aux limites, contrairement à ce qui est avancé.

## § 70. Conclusion

On l'a vu, l'instabilité strato-rotationnelle, en faisant intervenir les effets de stratification et de force de Coriolis, est assez difficile à approcher et un critère général d'instabilité reste à trouver. Le mécanisme physique lui-même, à l'origine de l'instabilité reste à déterminer. Une piste est de considérer la SRI comme une interaction entre des ondes de densité dues à la stratification, et des ondes de Kelvin<sup>23</sup>, résultat de l'interaction au voisinage d'une paroi entre la force de Coriolis et la pression. L'instabilité serait alors due à la superposition de deux ondes de Kelvin allant en sens contraire le long de chacun des murs. Ce schéma permettrait alors d'expliquer la dépendance de

<sup>23</sup>Les ondes de Kelvin sont assez étudiées en océanographie. En effet, elles peuvent suivre le contour des côtes océaniques ainsi que l'équateur et sont en partie responsables de phénomènes climatiques locaux tel que *El Niño*

la SRI vis-à-vis des conditions aux limites. Cependant, cette description reste assez spéculative et doit être étudiée plus en détails.

Pour conclure, j'ai montré à travers cette partie que l'instabilité strato-rotationnelle est une instabilité pouvant apparaître dans les écoulements stratifiés cisailés en rotation. Des conditions aux limites type rigides, ou du moins, une zone radiale de faible densité semble nécessaire pour son existence. De plus, cette zone doit être relativement étroite (de taille inférieure à la hauteur du disque), ce qui fait de la SRI une instabilité peu probable dans le cas général d'un disque d'accrétion. Cependant, elle pourrait avoir un intérêt astrophysique au voisinage des zones de disque appauvries en gaz par le passage d'une planète en formation.

# Partie V

## Instabilité magnéto-rotationnelle

10	Champ magnétique et stabilité des disques	145
11	Etude numérique de l'instabilité magnéto-rotationnelle	159





# 10

## Champ magnétique et stabilité des disques

« La réalité, c'est ce qui fait mal  
quand on éteint l'ordinateur »

— J. Warsen

L'ordinateur en un clique

### Plan du chapitre

1. Une instabilité MHD dans les disques? .....	145
§ 71. Origines .....	145
§ 72. Description phénoménologique .....	146
2. Analyse linéaire en présence d'un champ magnétique vertical .....	147
§ 73. Dérivation d'une relation de dispersion pour les modes axisymétriques .....	147
§ 74. Nombres sans dimensions .....	149
§ 75. Limite sans dissipation .....	150
§ 75.1. Étude formelle .....	150
§ 75.2. Implications pour les disques et les simulations .....	151
§ 76. MRI avec dissipation .....	152
§ 76.3. Cas $Pm = 1$ .....	152
§ 76.4. Cas général .....	153
§ 77. Conclusion .....	157

### 1. Une instabilité MHD dans les disques?

#### § 71. Origines

LA POSSIBILITÉ QU'UN CHAMP MAGNÉTIQUE AIT UNE INFLUENCE sur la dynamique des disques d'accrétion a été avancée dès les années 60 par Lynden-Bell (1969). Cependant, cette hypothèse a été négligée durant un certain nombre d'années, au profit de mécanismes de transport hydrodynamiques, jusqu'à la découverte d'une instabilité due au couplage entre un disque et un champ magnétique par Balbus & Hawley (1991a). Par la suite, cette instabilité magnéto-rotationnelle (MRI) a été longuement étudiée analytiquement et numériquement. On suppose aujourd'hui qu'elle est la source principale du

transport dans les disques d'accrétion magnétisés, ce qui en fait un sujet d'étude de choix pour la compréhension et la modélisation de la dynamique des disques d'accrétion.

L'existence d'une instabilité linéaire *a priori* simple a permis d'effectuer assez rapidement des simulations numériques locales bidimensionnelles (Balbus & Hawley 1991b) puis tridimensionnelles (Hawley *et al.* 1995; Stone *et al.* 1996). Par la suite, des simulations globales de disques d'accrétions couplées à des champs magnétiques ont été obtenues grâce à des moyens numériques plus conséquents (Hawley 2000). Enfin, l'aspect énergétique de cette instabilité a été étudié par Gardiner & Stone (2005), et a permis de mettre en évidence le chauffage dû à la turbulence pour différentes topologies du champ magnétique.<sup>24</sup>

De manière assez surprenante, ces travaux numériques n'incluaient pas de terme de dissipation d'énergie de nature physique (par exemple viscosité et résistivité moléculaire), la dissipation de la turbulence étant alors due soit aux termes de dissipation artificielle (cas du code Zeus3D par exemple), soit aux approximations de grilles utilisées (codes Godunov). Remarquons cependant que plusieurs travaux numériques ont introduit des termes de dissipation. Citons ainsi Brandenburg *et al.* (1995), où la dissipation physique restait maintenue à un niveau extrêmement faible (100 fois plus faible que la dissipation artificielle), et Fleming *et al.* (2000) où seul un terme de résistivité physique était introduit (la dissipation visqueuse étant alors numérique). Ce manque d'intérêt vis-à-vis des phénomènes dissipatifs dans des écoulements, pourtant hautement turbulents, n'est pas spécifique à ce problème, comme je l'ai montré dans la partie consacrée à la turbulence sous critique. Néanmoins, « l'oubli » des termes de dissipations pose la question de la convergence des simulations numériques. En effet, comme la dissipation est contrôlée par la taille de grille, cette dernière devient *nécessairement* un paramètre physique, ce qui ne peut en aucun cas impliquer la convergence numérique<sup>25</sup>. Comme je le montrerai, ce point négligé dans les travaux précédents s'avère avoir un rôle capital dans la saturation de la MRI.

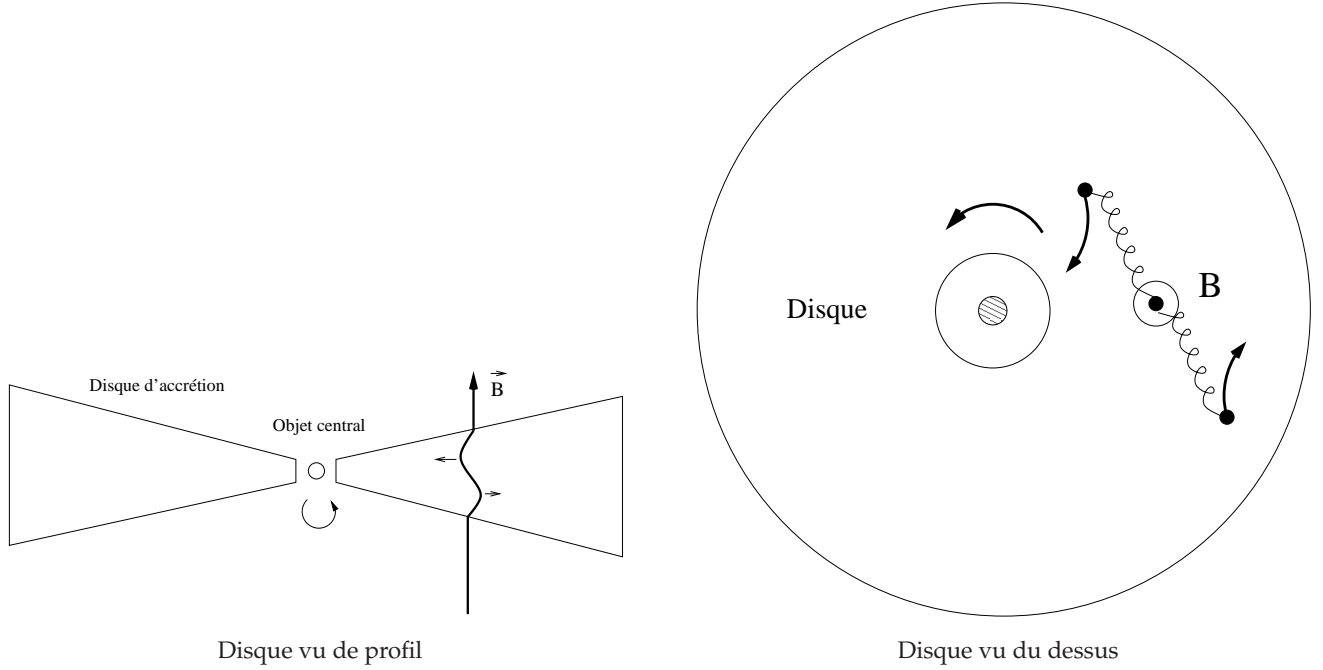
Notons d'autre part que ces études ont été systématiquement effectuées avec des champs magnétiques relativement faibles ( $\beta > 100$ ). On peut néanmoins s'interroger sur le comportement de cette instabilité lorsque le champ magnétique est fort, c'est à dire lorsque la pression magnétique est voisine de la pression thermique. Ce point présente un fort intérêt pour les modèles d'accrétion-éjection tel que celui développé par Ferreira & Pelletier (1995) où l'une des contraintes associées à l'éjection est l'équipartition entre énergie thermique et magnétique.

## § 72. Description phénoménologique

Avant d'effectuer tout calcul d'instabilité, il est intéressant de comprendre les phénomènes physiques mis en jeu par la MRI. Pour cela, je vais utiliser une description qualitative de cette instabilité tirée de Balbus & Hawley (2003). considérons un disque non dissipatif traversé par un champ magnétique vertical  $B$  (Fig. 73). On déplace initialement deux particules fluides radialement de part et d'autre de leur point d'origine. Les particules fluides conservant leur

<sup>24</sup>Le chauffage étant, dans ces travaux, dû à la dissipation aux voisinages de chocs par une méthode de Godunov, ce qui est assez éloigné de la notion classique de viscosité et résistivité moléculaire.

<sup>25</sup>Rappelons que la convergence numérique signifie que la simulation devient indépendante de la résolution. En pratique, on dira qu'une simulation est convergée lorsque une augmentation de la résolution ne modifie pas le résultat physique.



**FIG. 73.** Schéma de principe à l'origine de l'instabilité magnétorotationnelle. La torsion du champ ou au déplacement du fluide tend à ramener le fluide vers sa position initiale (similaire à l'action d'un ressort). Le mouvement peut s'amplifier si  $\partial_r \Omega < 0$  (voir texte).

moment cinétique, la particule interne voit sa vitesse angulaire augmenter et inversement pour la particule externe. De plus, ce déplacement tord la ligne de champ  $B$  qui est fixée aux particules fluides (MHD idéale). Cette torsion induit donc un couple de rappel qui tend à ramener les particules fluides vers leur état initial : la particule intérieure est ralentie et la particule extérieure est accélérée. Si  $\partial_r |\Omega| < 0$  la particule intérieure peut acquérir une vitesse inférieure à la vitesse locale du fluide : elle tombe alors vers l'intérieur et le déplacement s'amplifie (le phénomène inverse est applicable à l'extérieur). On voit alors avec cette analyse que la condition de stabilité est

$$\partial_r |\Omega| > 0. \quad (72.283)$$

Cette limite est fondamentalement différente du critère de stabilité Rayleigh  $\partial_r |r^2 \Omega| > 0$  et permet de rendre instable les disques Képlerien comme nous allons voir par la suite.

## 2. Analyse linéaire en présence d'un champ magnétique vertical

### § 73. Dérivation d'une relation de dispersion pour les modes axisymétriques

La relation de dispersion que je dérive ici n'est pas fondamentalement nouvelle. En effet, on retrouvera les résultats que je présente dans le cas non dissipatif dans Balbus & Hawley (1991a). De plus, dans le cas faiblement ionisé, on pourra considérer les calculs de Blaes & Balbus (1994), Wardle (1999) et Balbus & Terquem (2001), faisant intervenir différents types de dissipation du champ magnétique (Loi d'Ohm, effet Hall,...). C'est ce type d'approche qui permet de mettre en évidence le problème de la *dead zone* (Gammie 1996), zone trop faiblement couplée au champ magnétique pour déclencher la MRI, déjà évoqué dans la partie 3 de ce manuscrit. Par ailleurs,

la recherche de la MRI en laboratoire a conduit un certain nombre d'auteurs à considérer à la fois les termes de viscosité et de résistivité dans la relation de dispersion (Ji *et al.* 2001; Rüdiger & Shalybkov 2002). Enfin, on pourra trouver des résultats de stabilité linéaire en conditions stratifiées, en présence de résistivité, viscosité et conductivité thermique dans Menou *et al.* (2004). Il semble cependant qu'aucune de ces relations n'ait permis de mettre en avant des limites formelles claires en fonction des coefficients de dissipation. Aussi, je propose ici un calcul complet de la MRI dans l'approximation non stratifiée, incompressible et axisymétrique, faisant intervenir à la fois une viscosité et une résistivité ohmique.

Pour dériver la relation de dispersion, on se place dans l'approximation du modèle local de Hill (§ 9, p. 22), où l'on néglige le terme de stratification. On écrit alors les équation (9.53) et (9.54) pour la vitesse  $\mathbf{u}$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}$  sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{\nabla P}{\rho} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + 2\Omega S y \mathbf{e}_y + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (73.284) \\ \partial_t \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

dans lesquelles sont définies la viscosité cinématique moléculaire  $\nu$  et la résistivité moléculaire  $\eta$ . Dans la suite, je me concentrerai sur l'évolution de perturbations axisymétriques infiniment petites par rapport à l'écoulement laminaire. Pour ce faire, nous noterons  $\mathbf{v}$  les déviations à l'écoulement laminaire sous la forme  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - S y \mathbf{e}_x$  où  $S$  est le cisaillement de l'écoulement moyen. De plus, je supposerai que le disque est baigné dans un champ magnétique vertical uniforme  $B_0 \mathbf{e}_z$  et on notera les déviations infinitésimales du champ magnétique  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{b}$ . En linéarisant le système précédent, il vient alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla \psi - 2\Omega v_x \mathbf{e}_y + (2\Omega - S) v_y \mathbf{e}_x + \frac{B_0}{4\pi\rho} \partial_z \mathbf{b} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (73.285) \\ \partial_t \mathbf{b} &= B_0 \partial_z \mathbf{v} + b_y S \mathbf{e}_x + \eta \Delta \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0\end{aligned}$$

où l'on a défini la pression effective  $\psi = P/\rho + B_0 b_z/\rho$ . Le système d'équation (73.285) étant homogène, on peut utiliser une décomposition en modes de Fourier en notant  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \exp [i(\omega t - k_y y - k_z z)]$  et  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 \exp [i(\omega t - k_y y - k_z z)]$ , ce qui nous permet d'obtenir le système

$$\begin{aligned}(i\omega + \nu k^2) \mathbf{v}_0 &= i \mathbf{k} \psi - i k_z \frac{B_0}{4\pi\rho_0} \mathbf{b}_0 + (2\Omega - S) v_y \mathbf{e}_x - 2\Omega v_x \mathbf{e}_y \quad (73.286) \\ (i\omega + \eta k^2) \mathbf{b}_0 &= -i k_z B_0 \mathbf{v} + b_y S \mathbf{e}_x \\ i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ i \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}$$

La recherche de solutions non triviales nous permet d'obtenir la relation de dispersion. En définissant  $\omega_\nu \equiv \omega - i\nu k^2$  et  $\omega_\eta \equiv \omega - i\eta k^2$ , la vitesse d'Alfvén  $V_A^2 = B_0^2/4\pi\rho$ , la fréquence

épicyclique  $\kappa^2 = 2\Omega(2\Omega - S)$  et  $\gamma^2 = k_z^2/k^2$ , on obtient la relation de dispersion sous la forme :

$$(\omega_v \omega_\eta - k_z^2 V_A^2) \left( \omega_v^2 \omega_\eta^2 - 2\omega_v \omega_\eta k_z^2 V_A^2 - \omega_\eta^2 \kappa^2 \gamma^2 - k_z^2 V_A^2 (2\Omega S \gamma^2 - k_z^2 V_A^2) \right) = 0 \quad (73.287)$$

que l'on résoudra dans différents domaines d'approximations.

## § 74. Nombres sans dimensions

Le système d'équations (73.285) permet de définir une série de nombres sans dimension, caractéristiques du problème, à condition de disposer d'une échelle de longueur (fixée par les conditions aux limites). On définit donc une échelle de hauteur de verticale  $H$ , correspondant physiquement à l'échelle verticale de stratification du disque, et numériquement à la taille verticale de la boîte de simulation. On utilise alors :

**Le nombre de Reynolds:** Déjà utilisé précédemment, il compare le terme d'advection du champ de vitesse au terme de dissipation visqueuse :

$$Re = \frac{SH^2}{\nu} \sim \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}{\nu \Delta \mathbf{u}}$$

**Le nombre de Reynolds magnétique:** Par analogie avec le Reynolds hydrodynamique, on définit un Reynolds magnétique comparant le transport du champ magnétique aux effets de résistivité :

$$Rm = \frac{SH^2}{\eta} \sim \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B}}{\eta \Delta \mathbf{B}}$$

**Le nombre de Prandtl magnétique:** Ce nombre sans dimension n'est pas indépendant des deux précédents. Cependant, comme on le verra par la suite, il permet de mettre en évidence un certain nombre de phénomènes physique intéressants pour l'astrophysicien. Il se définit comme étant le rapport des coefficients de dissipation visqueux et résistifs, ce que l'on écrira sous la forme :

$$Pm = \frac{\nu}{\eta} = \frac{Rm}{Re}$$

**Le coefficient de plasma:** En MHD, on définit couramment le coefficient de plasma comme étant le rapport des pressions thermique et magnétique. Cette étude étant incompressible, on ne peut pas utiliser une telle définition. J'utiliserai donc une définition légèrement différente, de telle sorte que le coefficient de plasma compare les effets de transport hydrodynamique et la force de Lorentz, ce que j'écrirai :

$$\beta = \left( \frac{SH}{V_A} \right)^2 \sim \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} / 4\pi\rho}.$$

Remarquons que cette définition du coefficient de plasma est identique, à un facteur de l'ordre de l'unité près, à la définition classique, si l'on suppose que le disque d'accrétion est en équilibre hydrostatique vertical de sorte que  $SH \simeq c_s$  où  $c_s$  est la vitesse du son.

**Le nombre de rotation:** Ce nombre, utilisé abondamment dans notre étude hydrodynamique, compare la force de Coriolis aux termes de transport hydrodynamique :

$$R_\Omega = -\frac{2\Omega}{S}$$

Dans cette partie, il sera systématiquement fixé à  $R_\Omega = -4/3$  pour obtenir un écoulement Képlerien.

## § 75. Limite sans dissipation

### § 75.1. Étude formelle

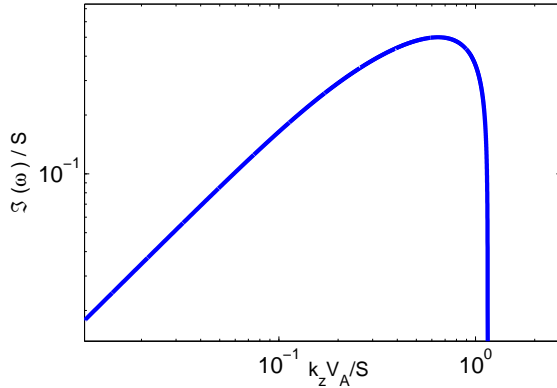
Avant d'étudier l'influence des termes dissipatifs, je vais rappeler les principaux résultats concernant la MRI dans la limite de la MHD idéale. Dans cette, limite, l'équation précédente s'écrit simplement :

$$(\omega^2 - k_z^2 V_A^2) \left[ \omega^4 - \omega^2 (2k_z^2 V_A^2 + \kappa^2 \gamma^2) - k_z^2 V_A^2 (2\Omega S \gamma^2 - k_z^2 V_A^2) \right] = 0 \quad (75.288)$$

On remarquera dans un premier temps la solution Alfvénique triviale  $\omega = \pm k_z V_A$ . L'annulation du second polynôme de l'équation de dispersion nous permet d'obtenir :

$$\omega^2 = k_z^2 V_A^2 + \frac{\kappa^2 \gamma^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\kappa^4 \gamma^4 + 16k_z^2 V_A^2 \Omega^2 \gamma^2} \quad (75.289)$$

Remarquons qu'un critère d'instabilité nécessaire et suffisant est d'avoir  $\Im m(\omega) < 0$ , ou de manière équivalente  $\omega^2 < 0$ . Ainsi, dans le cas d'un disque d'accrétion ( $\kappa^2 > 0$ ), on utilisera la deuxième solution (solution  $(-)$ ) pour trouver l'instabilité recherchée. De plus, on remarquera que l'instabilité est d'autant plus forte que  $\gamma$  est proche de 1. On posera donc dans la suite  $\gamma = 1$  par simplicité.



**FIG. 74.** Tracé du taux de croissance de la MRI en régime képlerien en fonction de la pulsation d'Alfvén  $k_z V_A$ . On remarque que cette instabilité apparaît pour des pulsations comprises entre 0 et  $\omega_A^{\max} \simeq 1$ .

Le taux de croissance obtenu avec l'expression (75.289) ne dépend alors que de la pulsation d'Alfvén  $\omega_A = k_z V_A$  (le nombre de rotation étant fixé au régime Képlerien). On obtient ainsi le tracé de  $\Im m(\omega)$  en fonction de la pulsation d'Alfvén (Fig. 74). L'analyse de ce tracé nous permet d'obtenir les 3 caractéristiques essentielles de la MRI non dissipative.

- **Comportement asymptotique en champ faible.** Lorsque  $k_z V_A \ll \kappa$ , la MRI a un comportement asymptotique simple, que l'on peut dériver à partir de (75.289) :

$$\Im m(\omega) = \pm k_z V_A \sqrt{\frac{2\Omega S}{\kappa^2}} \quad (75.290)$$

soit pour un disque képlerien et en remarquant que  $V_A = SH\beta^{-1/2}$  :

$$\Im m(\omega) = \pm \sqrt{3} k_z H \beta^{-1/2} S \quad (75.291)$$

Ainsi, la MRI existe pour des champs arbitrairement faibles, comme on peut le voir sur la figure (74). Notons cependant que comme les taux de croissance deviennent très faibles, les effets dissipatifs de la MHD non idéale stabiliseront l'écoulement pour des  $\beta$  suffisamment grands.

- **Seuil en champ fort.** Comme on peut le voir sur la figure (74), la MRI disparaît lorsque  $V_A k_z$  devient suffisamment grand. Ce seuil peut être obtenu en posant  $\omega^2 = 0$  dans l'expression (75.289). Il vient alors au régime képlerien :

$$k_z V_A = \sqrt{\frac{4}{3}} S \quad (75.292)$$

- **Maximum du taux de croissance.** En dérivant l'expression (75.289) par rapport à  $k_z V_A$ , on montre facilement que le maximum du taux de croissance en régime Képlerien est tel que :

$$k_z V_A = \sqrt{\frac{5}{12}} S \quad (75.293)$$

Pour cette pulsation, on tire de (75.289) le maximum du taux de croissance, qui s'exprime simplement par :

$$\Im(\omega)_{\max} = \frac{S}{2} \quad (75.294)$$

### § 75.2. Implications pour les disques et les simulations

En pratique, à l'échelle locale, un disque dispose d'une échelle caractéristique  $H$  qui fixe la plus grande longueur d'onde accessible au système et donc  $k_{z\min}$ . De la même manière, dans une simulation, la taille de boîte fixe le nombre d'onde minimum. Ainsi, dans les cas physiques, une fois que l'intensité du champ magnétique ( $\beta$ ) et la taille de boîte sont fixés, on dispose d'une pulsation Alfvénique minimum accessible au système physique telle que :

$$(k_z V_A)_{\min} = 2\pi\beta^{-1/2} S \quad (75.295)$$

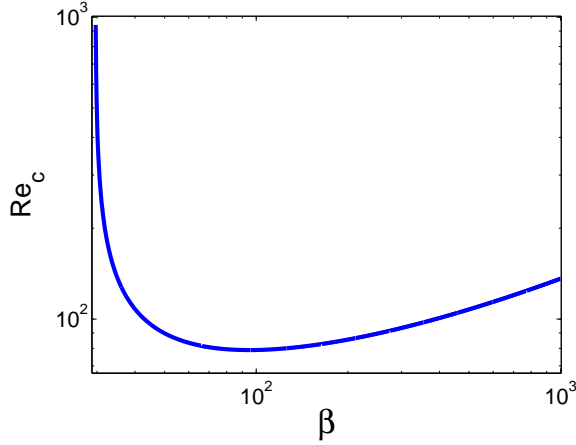
Ainsi, en utilisant (75.292) et l'expression précédente, seuls les modes vérifiant :

$$2\pi\beta^{-1/2} < k_z H \beta^{1/2} < \sqrt{\frac{4}{3}} \quad (75.296)$$

seront instables vis à vis de la MRI. En pratique, pour un champ suffisamment fort ( $\beta < 3\pi^2 \simeq 29,5$ ), l'inégalité précédente ne peut jamais être vérifiée et l'instabilité n'existe pas dans le système physique considéré. Autrement dit, tous les modes instables ont une longueur d'onde plus grande que la taille de l'écoulement. En ce sens, on dira que la MRI est une instabilité en champ faible. Remarquons que dans le cas d'un écoulement stratifié verticalement, on obtient la limite  $\beta \simeq 3$  (Balbus & Hawley 1991a), ce qui semble indiquer que la MRI peut exister quasiment jusqu'à l'équipartition entre énergie thermique et magnétique,  $\beta \gtrsim 1$ .

Lorsque l'on diminue l'intensité du champ magnétique à partir de la limite précédente, on fait entrer aux grandes longueurs d'ondes des modes instables dans l'écoulement. On remarquera alors que le mode le plus instable mis en évidence dans (75.293) apparaît dans l'écoulement si  $\beta > 48\pi^2/5 \simeq 97,7$ . Pour des champs magnétiques plus faibles que cette valeur limite, le taux de croissance observé sera dominé par celui du mode le plus instable. On retrouvera donc un taux de croissance constant égal à (75.294).





**FIG. 75.** Tracé du seuil d'instabilité de la MRI en fonction de l'intensité du champ magnétique et de la dissipation pour  $Pm = 1$ . On remarque le seuil en champ fort mis en évidence dans l'analyse non dissipative  $\beta \simeq 29,5$  et le Reynolds minimum pour obtenir l'instabilité  $Re \simeq 80$ .

## § 76. MRI avec dissipation

### § 76.1. Cas $Pm = 1$

Le cas avec un nombre de Prandtl égal à 1 peut être étudié analytiquement et permet de dériver quelques limites intéressantes. Dans la suite on posera donc  $\nu = \eta$  dans la relation de dispersion (73.287) ce qui nous permet d'obtenir :

$$(\omega_v^2 - k_z^2 V_A^2) \left[ \omega_v^4 - \omega_v^2 (2k_z^2 V_A^2 + \kappa^2 \gamma^2) - k_z^2 V_A^2 (2\Omega S \gamma^2 - k_z^2 V_A^2) \right] = 0 \quad (76.297)$$

Le critère d'instabilité sur  $\Im m(\omega)$  est équivalent dans notre cas à  $\nu^2 k^4 < -\omega_v^2$ . En remarquant que la relation de dispersion précédente est formellement identique à (75.288), on obtient facilement la condition nécessaire et suffisante d'instabilité :

$$\nu^2 < \frac{\sqrt{\kappa^4 \gamma^4 + 16k_z^2 V_A^2 \Omega^2 \gamma^2}}{2k^4} - \frac{k_z^2 V_A^2}{k^4} - \frac{\kappa^2 \gamma^2}{2k^4} \quad (76.298)$$

où l'on a utilisé la solution (75.289). On remarquera alors que la dissipation maximum pour obtenir l'instabilité est donnée en considérant le mode le plus grand  $k_z = 2\pi/H$ ,  $\gamma = 1$ . On trace alors une courbe d'instabilité en fonction de l'intensité du champ magnétique ( $\beta$ ) et de la dissipation ( $Re$ ) pour ce mode (Fig. 75). Cette courbe montre à nouveau le seuil d'instabilité en champ fort mis en évidence dans la section précédente pour  $\beta = 3\pi^2$ . On note aussi l'apparition d'un Reynolds minimum pour obtenir l'instabilité ( $Re_{\min} \simeq 80$ ), obtenu pour  $\beta \simeq 100$ .

On peut enfin obtenir le comportement asymptotique du seuil de l'instabilité dans la limite  $\beta \rightarrow \infty$  en utilisant l'expression du taux de croissance (75.291). L'instabilité est alors obtenue dans cette limite si et seulement si :

$$Re > \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \beta^{1/2} \quad (76.299)$$

Conformément à ce qui était attendu, le nombre de Reynolds critique augmente quand le champ magnétique diminue. Ainsi, pour un Reynolds donné, un écoulement nécessite un champ magnétique minimum pour que l'instabilité se développe. Ce point est conforme à l'intuition que l'on peut avoir, dans la mesure où le champ magnétique vertical est un des moteurs de l'instabilité.

### § 76.2. Cas général

Dans le cas général, il n'est pas possible d'obtenir une expression pour les taux de croissance. Cependant, on peut obtenir des relations analytiques dans la limite en champ faible  $V_A k_z \ll \kappa$ . Ainsi, si on se place en champ magnétique nul  $V_A = 0$ , l'équation de dispersion (73.287) donne deux racines distincts :  $\omega_\eta^2 = 0$  et  $\omega_\nu^2 = \kappa^2$ . On reconnaîtra dans la première solution le départ d'une branche Alfvénique (donnant lieu aux ondes d'Alfvén dans un milieu isotrope), et dans la seconde les modes inertiels oscillants à la fréquence épicyclique. Nous allons étudier l'évolution de la branche Alfvénique, à l'origine de la MRI, lorsque  $V_A k_z$  est petit mais non nul. On pose alors  $\omega_\eta = \delta\omega$ , soit  $\omega = \delta\omega + i\eta k^2$ . Si on suppose que  $\delta\omega$  est de l'ordre de  $V_A k_z$ , l'équation (73.287) s'écrit à l'ordre le plus bas :

$$\delta\omega^2[-k^4(\eta - \nu)^2 - \kappa^2] = 2\Omega S(V_A k_z)^2 \quad (76.300)$$

On obtient alors l'expression de la pulsation  $\omega$  sous la forme :

$$\omega = i\eta k_z^2 \pm i \left( \frac{2\Omega S}{k_z^4(\eta - \nu)^2 + \kappa^2} \right)^{1/2} V_A k_z \quad (76.301)$$

On remarque que dans cette expression, la viscosité et la résistivité n'ont pas un rôle symétrique. En particulier, à résistivité nulle, l'instabilité existe toujours, même pour des viscosités très grandes. Notons enfin que nous pouvons retrouver dans cette expression le taux de croissance en MHD idéal (Eq. 75.290) pour  $\nu = \eta = 0$ .

• **Limite à petit Prandtl.** La limite à petit Prandtl magnétique peut être dérivée d'après (76.301) en posant  $\nu \ll \eta$ . On obtient alors en imposant  $\omega = 0$  :

$$\eta k^2 = \left( \frac{2\Omega S}{\kappa^2} \right)^{1/2} V_A k_z \quad (76.302)$$

où l'on a utilisé l'hypothèse initiale  $V_A k_z \ll \kappa$ . En considérant le mode instable le plus grand ( $k_z = 2\pi/H$ ), on obtient l'expression général du seuil de l'instabilité en fonction des nombres sans dimensions :

$$Rm_c = \left( \frac{2\pi}{3^{1/2}} \right) \beta^{1/2} \quad (76.303)$$

On notera que le seuil (76.303) est identique à celui de Fleming *et al.* (2000). De plus, c'est cette limite qui est à l'origine des *dead zones* présentes dans les disques froids des étoiles jeunes, dans lesquelles la MRI ne peut se développer en raison d'un taux d'ionisation (et donc un Reynolds magnétique) trop faible (Gammie 1996).

Dans le cas d'une résistivité faible, le taux de croissance du mode le plus instable  $k_z = 2\pi/H$  s'exprime sous la forme :

$$\tau^{-1} \simeq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\Omega S}{\kappa^2} \right)^{1/2} V_A k_z \quad (76.304)$$

On remarquera que l'on retrouve là l'expression du taux de croissance dans le cas non dissipatif en champ magnétique faible (Eq. 75.290).

• **Limite à grand Prandtl.** En suivant une procédure similaire à celle utilisée précédemment avec  $\eta \ll \nu$ , on extrait la limite de stabilité de (76.301) :

$$\nu k^2 = \left( \frac{2\Omega S}{\eta^2 k^4} \right)^{1/2} V_A k_z \quad (76.305)$$

où l'on a utilisé l'hypothèse auto-consistante  $\eta k^2 \ll V_A k_z$ . En suivant le raisonnement du cas  $Pm \ll 1$ , on obtient l'expression du seuil sous la forme :

$$ReRm = \frac{3^{1/2}}{2} (2\pi)^3 \beta^{1/2} \quad (76.306)$$

On retrouve ainsi le fait que l'instabilité peut exister avec des Reynolds arbitrairement petits. Dans cette limite, il est intéressant d'obtenir le taux de croissance de l'instabilité lorsque l'on s'éloigne du point de stabilité marginal :

$$\tau^{-1} \simeq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\Omega S}{\nu k_z^2} \right) V_A k_z \quad (76.307)$$

On notera que le taux de croissance obtenu ici diffère de manière significative du taux de croissance dérivé dans le cas  $Pm$  petit. D'après l'expression (76.301), on retrouvera le comportement (76.307) dès lors que  $\nu k_z^2 > \kappa$ , soit :

$$Re < 3(2\pi)^2/2 \simeq 60 \quad (76.308)$$

Cette limite nous permet alors de séparer un régime de haute et basse viscosité, où le taux de croissance de la MRI passe de (75.290) à (76.307). Afin d'éclaircir les causes physiques de cette limite, je vais montrer par une analyse qualitative les mécanismes mis en jeu dans la formation de l'instabilité dans chacun de ces régimes, en partant des équations fondamentales (73.286).

• **Différences qualitatives entre les limites de stabilité à haute et basse viscosité.** Tout d'abord, notons que dans la limite où  $V_A k_z \ll \kappa$  les champs  $v_x, v_y$  et  $b_y$  sont d'ordre  $V_A k_z$  par rapport à  $b_x$ . En ne retenant que les termes dominants dans (73.286), il vient alors :

$$(i\omega + \nu k_z^2) v_x = -i k_z \frac{B_0}{\mu_0 \rho_0} b_x + (2\Omega - S) v_y \quad (76.309)$$

$$(i\omega + \nu k_z^2) v_y = -2\Omega v_x \quad (76.310)$$

$$(i\omega + \eta k_z^2) b_x = b_y S \quad (76.311)$$

$$(i\omega + \eta k_z^2) b_y = -i k_z B_0 v_y \quad (76.312)$$

où l'on a supposé  $\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z$  par simplicité. Avec ce système d'équation, en nous plaçant tout d'abord à  $\nu = \eta = 0$ , nous retrouvons l'analyse phénoménologique présentée au § 72. Ainsi, considérons par exemple une perturbation en vitesse radiale  $v_y$ . La particule, en se déplaçant, conserve son moment cinétique et crée donc de la vitesse azimutale [Deuxième terme du membre de droite de (76.309)]. De plus, ce déplacement induit la formation d'un champ magnétique radial (Eq. 76.312), ce qui entraîne la formation d'un champ azimutal à cause du cisaillement (Eq. 76.311). Ce champ azimutal réagit alors sous la forme d'une force de rappel (identique au ressort présenté au § 72) sur  $v_x$  [Premier terme du membre de droite de (76.309)]. Remarquons au passage que les termes négligés par l'approximation  $V_A k_z$  sont en fait des termes de rappel sur l'axe  $y$  qui tendent à inhiber l'action de l'instabilité (ces termes sont responsables du seuil d'instabilité en champ fort, Eq. 75.292).

Étudions à présent la limite où  $\omega = 0$ ,  $\nu = 0$  et  $\eta k_z^2 \gg \kappa$ , correspondant à la stabilité marginale avec résistivité. Dans ce cas, on observe un équilibre sur l'axe  $x$  entre la force de Coriolis et la force de rappel magnétique. En combinant les équations (76.311) et (76.312), on obtient pour ce rappel magnétique l'expression :

$$-ik_z \frac{B_0}{\mu_0 \rho_0} b_x = -\frac{k_z^2 V_A^2}{\eta^2 k_z^4} S v_y \quad (76.313)$$

Ainsi, la résistivité tend à diminuer l'intensité de ce rappel. On peut comprendre ce résultat en remarquant que la résistivité tend à autoriser les lignes de champs à « glisser » dans l'écoulement. A forte résistivité, le déplacement radial  $v_y$  entraîne donc une plus faible déviation du champ magnétique dans la mesure où il glisse le long de l'écoulement pour revenir dans sa position initiale. Lorsque le rappel magnétique (76.313) devient trop faible pour compenser la force de Coriolis, l'instabilité disparaît. Enfin, si on impose que la force de Coriolis soit de même intensité que la force de rappel magnétique, on obtient la limite (76.303) dérivée précédemment.

Si on se place dans le cas inverse avec  $\omega = 0$ ,  $\nu \gg \eta$  et  $\eta > \kappa$ , on observe un nouvel équilibre pour l'équation (76.309). En effet, le terme de force de Coriolis devient négligeable, et on se trouve devant un équilibre entre la force de rappel magnétique et la force visqueuse que l'on écrira sous la forme :

$$-\nu k^2 v_x = \frac{\nu^2 k^4}{2\Omega} v_y \quad (76.314)$$

Lorsque l'équilibre est établi, on retrouve l'expression classique (76.305).

On comprend alors que dans les 2 limites, l'instabilité disparaît lorsque le rappel magnétique (76.313) devient plus faible que la force stabilisante, qui peut être soit la force de Coriolis soit la viscosité. Il est donc normal que le Reynolds magnétique apparaisse dans les deux limites de stabilité en champ faible (76.303) et (76.306), car il permet de contrôler l'intensité du rappel magnétique, et par là même le moteur de l'instabilité. Par ailleurs, le changement de régime visqueux décrit dans la section précédente correspond simplement à un changement de nature de la force stabilisante, comme je viens de le montrer.

• **Étude du taux de croissance général.** On peut étudier le taux de croissance sans faire d'approximation en considérant l'équation (73.287) dans sa forme générale. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \omega^4 - 2ik^2\omega^3(\eta + \nu) - \omega^2(a + k^4(\eta^2 + \nu^2 + 4\eta\nu) + b) \\ + \omega(2ik^6(\eta\nu^2 + \nu\eta^2) + aik^2(\nu + \eta) + 2ib\eta k^2) \\ + \nu^2\eta^2k^8 + a\nu\eta k^4 + b\eta^2k^4 - c = 0 \end{aligned} \quad (76.315)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} a &= 2k_z^2 V_A^2 \\ b &= \kappa^2 \gamma^2 \\ c &= k_z^2 V_A^2 (2\Omega \gamma^2 S - k_z^2 V_A^2) \end{aligned}$$

On ne peut évidemment résoudre analytiquement ce type de polynôme de manière simple. Cependant, on peut utiliser des méthodes numériques approchées permettant d'obtenir les

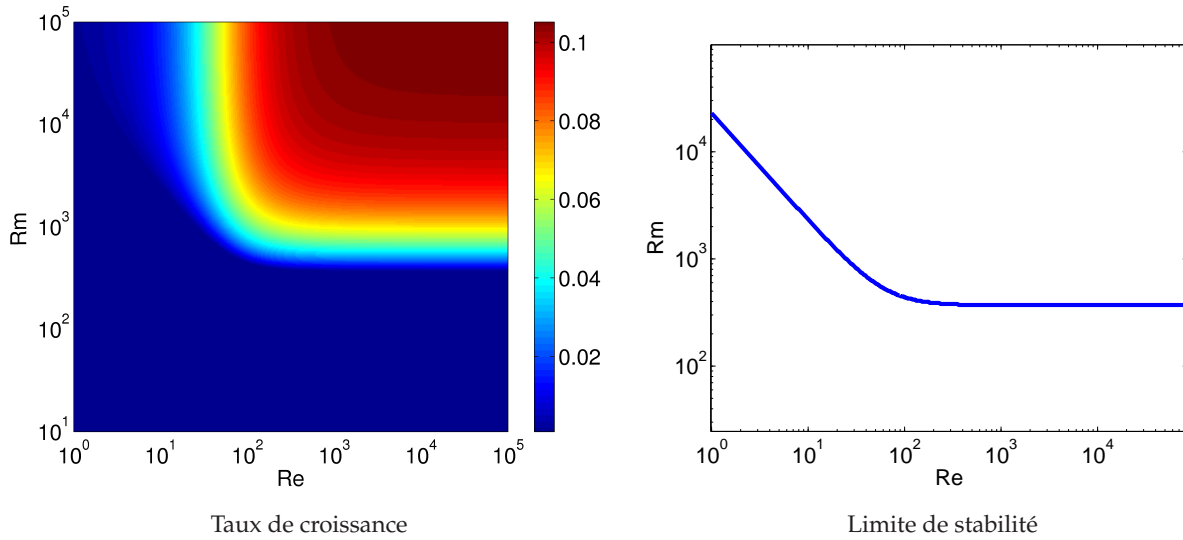
valeurs de  $\omega$  pour des paramètres  $V_A, k_z, \eta$  et  $\nu$  donnés. On réduit alors l'équation (76.315) à la recherche des zéros d'un polynôme que l'on notera :

$$P(\omega) = \omega^4 + \alpha_1 \omega^3 + \alpha_2 \omega^2 + \alpha_3 \omega + \alpha_4 \quad (76.316)$$

On remarquera alors que la recherche des zéros de  $P$  est identique à la recherche des valeurs propres de la matrice compagnon de  $P$  définie par

$$M_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \quad (76.317)$$

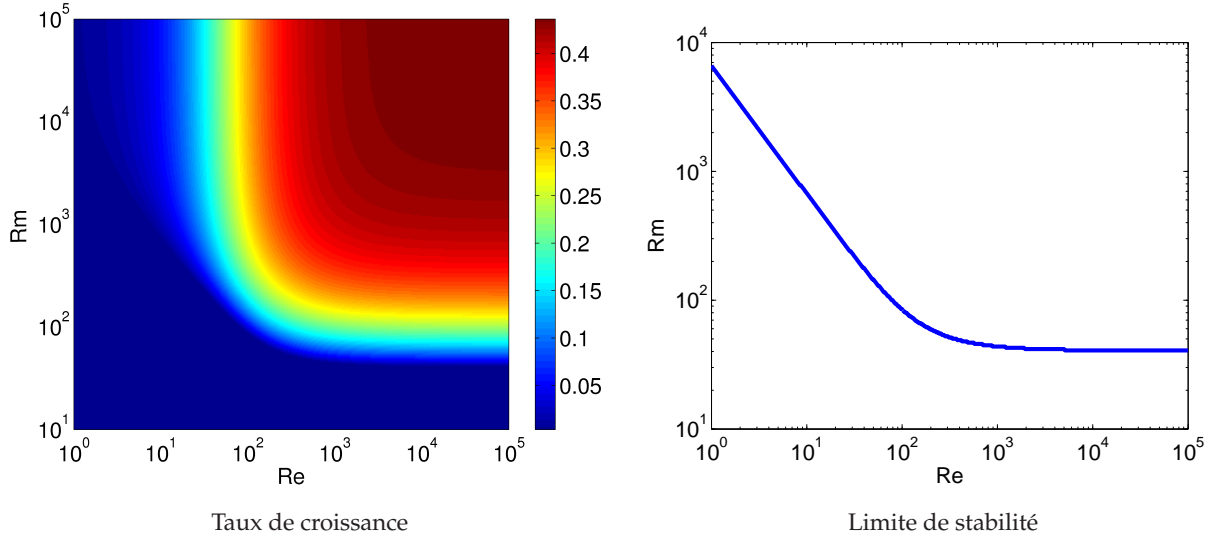
On est alors ramené à un problème de valeurs propres pour une matrice  $4 \times 4$  qui peut être facilement résolu (voir par exemple Press *et al.* 2002). On obtient avec ce type de procédure numérique des graphiques d'instabilité théorique, tel que la figure (76), obtenue en considérant le mode le plus large ( $k_z = 2\pi/H$ ) pour  $\beta = 10000$ , ce qui se situe dans la limite des champs magnétiques faibles d'après le critère évoqué plus haut.



**FIG. 76.** Tracé du taux de croissance en temps de cisaillement, et de la limite de stabilité linéaire pour un mode  $k_z = 2\pi/H$  et  $\beta = 10^4$ , d'après l'équation générale (76.315) On reconnaît les 2 limites de stabilité  $ReRm = cte$  et  $Rm = cte$  discutées précédemment.

On remarquera que l'on retrouve dans ce résultat numérique les limites analytiques (76.303) et (76.306), c'est-à-dire  $Rm_c \simeq 371$  pour  $Re > 60$ , et  $Rm_c Re_c \simeq 2,3 \times 10^4$  pour  $Re < 60$ . Par ailleurs, le taux de croissance dans le régime  $Re < 60$  est beaucoup plus faible que dans le régime faible viscosité, conformément à l'équation (76.307).

Dans le cas d'un  $\beta$  plus faible, la limite  $V_A k_z \ll \kappa$  n'est forcément satisfaite, et les limites de stabilité asymptotiques sont quantitativement fausses. Cependant, la figure (77) montre que le comportement général de la MRI n'est pas modifié, même pour des  $\beta$  petits (ici,  $\beta = 50$ ). On en déduira donc que le comportement de la MRI, et en particulier les deux régimes de viscosités ne sont pas fondamentalement modifiés en champ magnétique fort.



**FIG. 77.** Tracé du taux de croissance en temps de cisaillement, et de la limite de stabilité linéaire pour un mode  $k_z = 2\pi/H$  et  $\beta = 50$ , d'après l'équation générale (76.315). Les valeurs numériques prédites par notre analyse ne sont vérifiées ici. Cependant le comportement général reste identique à celui de la figure (76).

## § 77. Conclusion

On l'a vu, la MRI est une instabilité relativement complexe. Pour résumer les résultats de ce chapitre, je présente ici les points essentiels.

- La MRI fait intervenir un couplage entre le cisaillement, la force de Coriolis et le champ magnétique. On la trouve dans les écoulements cisailés en rotation anticyclonique en présence d'un champ magnétique faible.
- Un champ magnétique trop fort ( $\beta < 29,5$ ) stabilise le disque en rendant les plus petits modes instables plus grands que la taille verticale du disque.
- Pour un écoulement résistif et non visqueux (cas des disques d'accrétion), les effets de résistivité entraînent la disparition de l'instabilité lorsque  $Rm \simeq 3.6\beta^{1/2}$ , ce qui n'est pas sans poser des problèmes dans les disques faiblement ionisés et donc fortement résistifs (disques d'étoiles jeunes).
- Pour un disque à forte viscosité, un second régime d'instabilité apparaît ( $Re < 60$ ). Ce second régime, *a priori* non pertinent pour la physique des disques, a un taux de croissance plus faible que l'instabilité classique, et inversement proportionnel à la viscosité.



# 11

## Etude numérique de l'instabilité magnéto-rotationnelle

### Plan du chapitre

1. Méthodologie .....	159
§ 78. Sens physique des simulations .....	159
§ 79. Définition d'une viscosité turbulente.....	161
§ 80. Méthode numérique .....	163
§ 80.1. Paramètres .....	163
§ 80.2. Contrôle de la dissipation numérique.....	164
§ 80.3. Moyennes statistiques, écoulement de canal .....	164
2. Influence du champ magnétique sur la saturation .....	165
§ 81. Dépendance générale $\alpha(\beta)$ .....	165
§ 82. Limite en champ magnétique fort .....	165
§ 83. Bouffées turbulentes : phénomène physique ou numérique? .....	168
3. Influence de la dissipation sur la saturation .....	169
§ 84. Rôle du nombre de Prandtl .....	169
§ 85. Comparaison avec le taux de croissance linéaire.....	171
§ 86. Analyse spectrale .....	172
4. Cas sans champ magnétique vertical imposé.....	174
§ 87. Effets dissipatifs et existence de la turbulence.....	174
5. Conclusion.....	175

### 1. Méthodologie

#### § 78. Sens physique des simulations

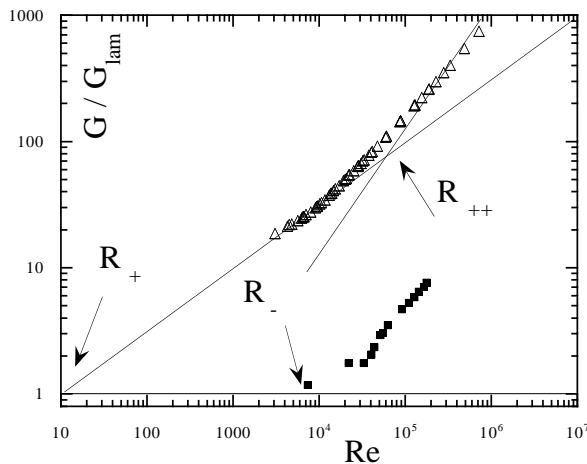
**L**A PLUPART DES SIMULATIONS QUI ONT ÉTÉ PUBLIÉES dans la littérature ont été effectuées en négligeant la résistivité et la viscosité, comme nous l'avons rappelé au chapitre précédent. Cependant, des tests que j'ai effectués en incluant ces termes dissipatifs montrent que l'on peut difficilement monter à des Reynolds supérieurs à quelques milliers avec les résolutions spectrales courantes ( $128^3$ ). On peut dès lors s'interroger



sur la pertinence physique de ces simulations quand il s'agit de caractériser les propriétés de transport d'un disque d'accrétion dont le Reynolds frôle les  $10^{15}$ .

Ainsi, on ne peut prendre au pied de la lettre les résultats des simulations actuelles et les extrapoler sur près de 10 ordres de grandeur pour les disques d'accrétion. Dans ce chapitre, je ne prétendrai donc pas que les simulations sont des simulations de disques. Par contre, je vais montrer, à l'aide de quelques exemples, que l'on ne s'attend pas à ce qu'une augmentation conjointe du Reynolds et du Reynolds magnétique modifie drastiquement les propriétés de transport turbulent obtenues. Ainsi, on pourra considérer que les simulations locales telles que celles présentées ici donnent une description générique, peut-être pas totalement quantitative, des quantités statistiques typiques d'une turbulence magnétohydrodynamique dans un disque d'accrétion.

Dans un premier temps, revenons à la transition turbulente des écoulements hydrodynamiques linéairement instables. Dans le cas des instabilités sous critiques (partie 3), nous avons vu que le passage du seuil de l'instabilité engendrait directement un écoulement à turbulence développée. Ce point n'est plus vrai dans le cas des instabilités linéaires : il existe un régime dans lequel l'écoulement développe une instabilité, mais ne peut être qualifié de « turbulent » car il fait apparaître des structures très organisées : c'est le cas des rouleaux de Taylor dans les écoulements convectifs par exemple. Pour les écoulements cisailés en rotation, ce régime peut être étudié lorsque l'écoulement est instable vis-à-vis du critère de Rayleigh. On peut alors mettre en évidence les différents régimes en mesurant le coefficient de transport en fonction du Reynolds de l'écoulement. Ainsi, dans le cas d'un écoulement dans le régime de transition entre laminaire et turbulent, on observe un transport adimensionnalisé évoluant en  $Re^{-1/2}$  (voir Fig. 78). Lorsque l'écoulement atteint un état de turbulence développée, on retrouve le résultat obtenu pour la turbulence sous critique, à savoir  $\alpha = \text{cte}$ . Ainsi, dans un écoulement hydrodynamique, si on atteint un Reynolds suffisamment élevé, on s'attend à ce que le transport, et probablement les autres quantités statistiques, deviennent indépendants du nombre de Reynolds.



**FIG. 78.** Tracé du couple (adimensionnalisé par le couple laminaire) entre les 2 cylindres d'un écoulement de Couette Taylor en fonction du Reynolds. Les triangles représentent un écoulement linéairement instable (critère de Rayleigh) et les carrés un écoulement turbulent sous critique. L'instabilité linéaire apparaît pour  $R_+ \sim 10$ . Le couple est en  $Re^{3/2}$  ( $\alpha \propto Re^{-1/2}$ ) entre  $R_+$  et  $R_{++}$  puis en  $Re^2$  ( $\alpha = \text{cte}$ ) pour  $Re > R_{++}$ . On dira alors que  $R_{++}$  est le Reynolds de transition vers l'état de turbulence développée. D'après Dubrulle *et al.* (2005a).

Comment expliquer ce comportement vis-à-vis de la phénoménologie utilisée dans la partie 3 (Fig. 38) ? On remarquera tout d'abord que les modes linéairement instables isolés ne peuvent engendrer de cascade turbulente telle que celle décrite dans notre phénoménologie. Ainsi, dans le cas d'une instabilité linéaire, l'obtention d'une cascade est conditionnée par un couplage suffisamment rapide par rapport aux temps de dissipation, entre les différents modes

instables. Si cette condition n'est pas remplie, l'écoulement pourra être instable linéairement, mais le couplage non linéaire formant de nouveaux modes sera très rapidement dissipé par la viscosité, et la cascade ne se formera pas : c'est le régime de transition entre état laminaire et état turbulent décrit précédemment. Lorsque le Reynolds devient suffisamment grand, on obtient une description similaire à celle obtenue d'après la figure (38) : le Reynolds ne fait que modifier l'échelle de dissipation en bas de la cascade de Kolmogorov. Le transport est alors contrôlé par les modes instables les plus grands et leurs couplages non linéaires : il est indépendant du Reynolds.

Dans le cas d'une turbulence MHD, le schéma est moins simple, notamment en raison de la présence de champ magnétique qui induit une anisotropie, mais aussi de la présence de 2 spectres (un spectre magnétique et spectre cinétique), qui peuvent fortement modifier la description précédente. Cependant, il semble qu'en l'absence d'effet dynamo les spectres MHD respectent eux aussi un spectre unidimensionnel type Kolmogorov  $E(k) \propto k^{5/3}$ , tant pour le champ magnétique que pour le champ de vitesse (Goldreich & Sridhar 1995; Cho & Vishniac 2000), dans la mesure où les échelles de dissipation cinétique et magnétique sont les mêmes. Ainsi, le schéma précédent ne devrait pas subir d'importantes modifications pour correspondre à la turbulence MHD, si l'on suppose que les spectres magnétiques et cinétiques sont similaires. Cependant, une modification du rapport des échelles de dissipation pourrait engendrer une dissymétrie des spectres (Cho *et al.* 2002), et rendre caduc le raisonnement précédent. Ainsi, en première approximation, les coefficients statistiques doivent être constants dans le régime de turbulence développé, lorsque l'on modifie *dans les mêmes proportions* (c'est-à-dire à  $Pm$  constant) les coefficients de viscosité et de résistivité.

On peut tester cette hypothèse numériquement assez facilement, dans un domaine de Reynolds malheureusement assez restreint (voir Tab. 4). On remarque dans cette série de simulations à  $\beta = 100$  que le coefficient de transport  $\alpha$  est à peu près constant dès  $Re = 400$  c'est-à-dire pour  $Re \simeq 5Re_c$ . Par ailleurs, nous avons superposé sur la figure (79) les tracés de l'énergie magnétique et cinétique moyenne pour des écoulements à différents Reynolds ( $Re > 400$ ). On notera là aussi qu'aux fluctuations statistiques près, les simulations donnent des résultats raisonnablement semblables. A titre de comparaison, on trouvera sur la figure (80) le tracé des mêmes quantités pour  $Re = 200$ . On pourra alors remarquer le comportement temporel fondamentalement différent de cette simulation par rapport à la figure (79) : le régime de turbulence développé n'est pas encore atteint.

Les arguments développés ici ne sont évidemment pas une preuve formelle mais plutôt un ensemble d'indices en faveur du fait que les simulations numériques locales de turbulence MHD peuvent nous donner des informations sur la physique des disques. Il conviendra donc de rester très prudent dans l'interprétation des résultats, en effectuant éventuellement des tests croisés en changeant les conditions aux limites, la physique ou le code numérique.

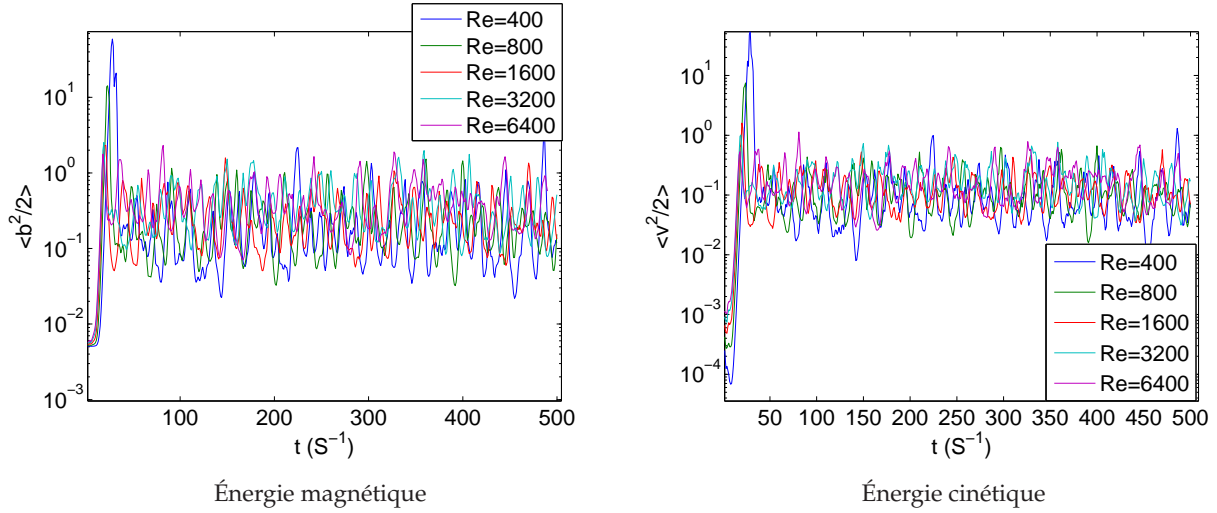
Dans la suite, je vais préciser quelques-unes des notions que j'ai utilisées ici, et je présenterai le protocole numérique employé en insistant sur les différents biais pouvant apparaître.

## § 79. Définition d'une viscosité turbulente

Dans le but de décrire précisément les phénomènes d'accrétion ou d'éjection dans les disques, il convient d'avoir une description aussi précise que possible des phénomènes de transport, et

$Re$	$\alpha_V$	$\alpha_B$	$\alpha = \alpha_B - \alpha_V$
200	-1,6	3,4	5,0
400	$-4,6 \times 10^{-2}$	$1,9 \times 10^{-1}$	$2,4 \times 10^{-1}$
800	$-3,6 \times 10^{-2}$	$1,9 \times 10^{-1}$	$2,2 \times 10^{-1}$
1600	$-2,8 \times 10^{-2}$	$1,8 \times 10^{-1}$	$2,0 \times 10^{-1}$
3200	$-3,7 \times 10^{-2}$	$2,9 \times 10^{-1}$	$3,1 \times 10^{-1}$
6400	$-3,4 \times 10^{-2}$	$2,5 \times 10^{-1}$	$2,9 \times 10^{-1}$

**TAB. 4.** Évolution des moyennes adimensionnalisées du tenseur de Reynolds ( $\alpha_V$ ), du tenseur de Maxwell ( $\alpha_B$ ) et du transport moyen ( $\alpha$ ) pour des simulations à  $\beta = 100$  pour différents Reynolds ( $Pm = 1$ ). On note que la simulation  $Re = 200$  ne semble pas avoir atteint un état de turbulence développée. Le protocole utilisé pour les moyennes est identique à celui décrit dans la section suivante.



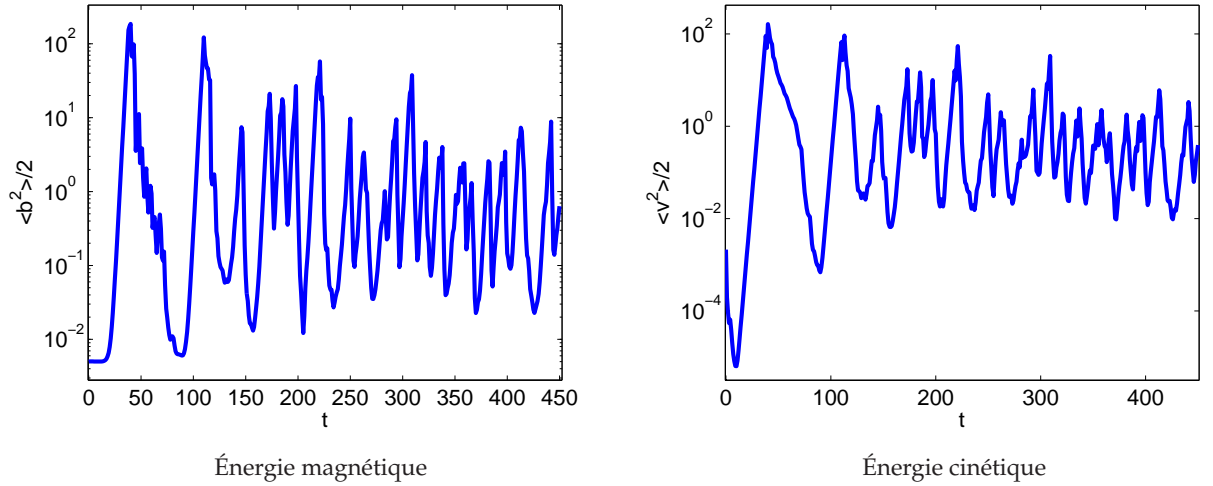
**FIG. 79.** Évolution temporelle des moyennes de boîte de l'énergie magnétique et cinétique dans l'écoulement en présence de MRI pour  $\beta = 100$  et  $Re > 400$ . Les courbes d'évolution temporelles sont relativement semblables pour chaque simulation.

donc de la turbulence. La description utilisée jusqu'à présent est celle du modèle  $\alpha$  telle qu'elle a été définie localement par les équations (41.161) et (41.162). En suivant la même démarche, nous allons définir un « transport turbulent » MHD, applicable à la MRI.

Pour se faire, nous séparons l'écoulement en une composante moyenne et une fluctuation de moyenne nulle :  $v = \bar{V} + v'$  et  $b = \bar{B} + b'$ . En moyennant l'équation (73.284), il vient alors :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \bar{V}_i + \bar{V}_j \partial_j \bar{V}_i &= -\partial_i \bar{\psi} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \bar{V}_k + \bar{B}_j \partial_j \bar{B}_i + \partial_j (\overline{b'_i b'_j} - \overline{v'_i v'_j}) + \nu \partial_j \partial_j \bar{V}_i \\
 \partial_t \bar{B}_i + \bar{V}_j \partial_j \bar{B}_i &= \bar{B}_j \partial_j \bar{V}_i + \partial_j (\overline{b'_j v'_i} - \overline{b'_i v'_j}) + \eta \partial_j \partial_j \bar{B}_i \\
 \partial_j \bar{V}_j &= 0 \\
 \partial_j \bar{B}_j &= 0
 \end{aligned} \tag{79.318}$$

où nous avons adimensionnalisé le champ de manière à éliminer les constantes  $4\pi\rho$  et où  $\psi$  est la pression généralisée (pression cinématique et pression magnétique).



**FIG. 80.** Évolution temporelle des moyennes de boîte de l'énergie magnétique et cinétique dans l'écoulement en présence de MRI pour  $\beta = 100$  et  $Re = 200$ . D'après le tableau (4), cette simulation n'est pas encore en régime de turbulence développée, ce que l'on peut vérifier ici en comparant l'évolution temporelle avec la figure (79).

On remarque alors plusieurs termes de corrélation des fluctuations des champs. On retrouve en particulier le tenseur de Reynolds  $v'_i v'_j$ , déjà utilisé dans la partie 3, associé au tenseur de Maxwell  $b'_i b'_j$ . Dans l'équation d'induction, on obtient par ailleurs le tenseur de Faraday  $b'_j v'_i - b'_i v'_j$ .

En suivant l'hypothèse de Boussinesq (§ 41.1, p.80), on définit une viscosité turbulente et une résistivité turbulente associées à ces tenseurs ce que l'on écrira :

$$\overline{b'_i b'_j} - \overline{v'_i v'_j} = \nu_t (\partial_i \overline{V}_j + \partial_j \overline{V}_i) \quad (79.319)$$

$$\overline{b'_j v'_i} - \overline{b'_i v'_j} = \eta_t (\partial_i \overline{B}_j + \partial_j \overline{B}_i) \quad (79.320)$$

Dans les écoulements que nous allons considérer, il n'existe pas de gradient moyen de  $\mathbf{B}$ , ainsi, on ne pourra pas obtenir de manière numérique une valeur moyenne pour la résistivité turbulente<sup>26</sup>. Enfin, on adimensionnalise  $\nu_t$  en faisant apparaître le coefficient  $\alpha$  :

$$\nu_t = \alpha S H^2 = (\alpha_B - \alpha_V) S H^2 \quad (79.321)$$

où l'on a séparé la contribution à  $\alpha$  venant du tenseur de Maxwell ( $\alpha_B$ ) de celle du tenseur de Reynolds ( $\alpha_V$ ).

## § 80. Méthode numérique

### § 80.1. Paramètres

Les simulations présentées dans ce chapitre sont obtenues avec le code spectral MHD décrit dans la deuxième partie de ce manuscrit. L'écoulement calculé correspond au modèle de Hill décrit en introduction (§ 9 p. 22), où l'on néglige la stratification. On utilise de plus les conditions aux limites shearing sheet (voir § 25.2 p. 51) dans la direction  $y$  et périodiques dans les directions  $x$  et  $z$ . On aura systématiquement (sauf mention contraire) une résolution de

<sup>26</sup>On vérifie de plus que la valeur moyenne du tenseur de Faraday est nulle dans les simulation.

$n_x \times n_y \times n_z = 128 \times 64 \times 64$  modes spectraux. Enfin, le rapport d'aspect sera fixé à  $L_x = 4$ ,  $L_y = 1$ ,  $L_z = 1$ , afin d'avoir une boîte légèrement allongée dans le sens de l'écoulement.

Les conditions initiales utilisées sont une perturbation des plus grandes longueurs d'ondes du champ de vitesse, le champ magnétique étant fixé à la valeur du champ vertical  $B_0$  voulu. Notons cependant que les conditions initiales n'ont pas d'influence sur les résultats que je présente ici, dans la mesure où les moyennes n'incluent pas les premiers temps dynamiques de la simulation (voir section suivante).

### § 80.2. Contrôle de la dissipation numérique

Remarquons que l'équation (79.318) nous permet de définir un bilan énergétique pour les fluctuations turbulentes. Ainsi, en suivant un calcul similaire au § 41.2 (p. 80), on obtient un bilan qui, une fois intégré sur le volume de la boîte de simulation, s'écrit :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = S(\overline{b'_i b'_j} - \overline{v'_i v'_j}) - \frac{\nu}{2}(\partial_k v'_i + \partial_i v'_k)^2 - \frac{\eta}{2}(\partial_k b'_i + \partial_i b'_k)^2 \quad (80.322)$$

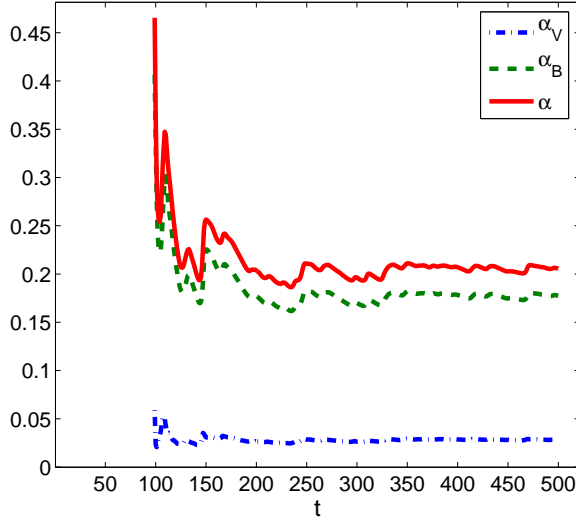
où  $e = b'^2/2 + v'^2/2$ . Cette équation de conservation nous permettra d'évaluer les pertes dues à la dissipation numérique, en évaluant chacun des termes de la même manière qu'en hydrodynamique. Ainsi, dans chacune des simulations présentées dans ce chapitre, la dissipation numérique contribue à moins de 1% à la dissipation totale observée dans le fluide.

### § 80.3. Moyennes statistiques, écoulement de canal

Dans la suite, un résultat important des simulations sera l'évaluation des coefficients de transport  $\alpha_i$  en fonction des différents nombres sans dimensions du problème. On doit donc passer par une statistique, comprenant une intégration des tenseurs de Reynolds et de Maxwell à la fois spatialement et temporellement. Notons de plus que ces quantités doivent être indépendantes des conditions initiales de la simulation (elles doivent refléter un état turbulent « typique »). Ainsi, dans toutes les moyennes de ce travail, les 100 premiers temps de cisaillement de la simulation ne sont pas utilisés et servent à relaxer les conditions initiales. On effectuera alors les moyennes sur 400 temps de cisaillement (sauf mention contraire). Notons que l'on peut vérifier la convergence des coefficients ainsi obtenus en calculant une moyenne cumulée (Fig. 81), qui montre que les valeurs obtenues ont une incertitude voisine de 10%, ce qui est largement suffisant pour notre étude.

Nous avons vu au chapitre précédent que la MRI, en présence d'un champ vertical, est essentiellement instable pour des modes oscillants selon l'axe  $z$ . De plus, dans l'approximation incompressible utilisée ici, ces modes verticaux sont aussi une solution non linéaire des équations de la MHD (Goodman & Xu 1994). Ainsi, on s'attend à ce que le mode le plus instable (qui est, en pratique, le mode ayant la taille verticale de la boîte de simulation), continue sa croissance indéfiniment : c'est la formation d'un écoulement de canal ou *channel flow*. Il se trouve que ce mode est à son tour linéairement instable lorsqu'il devient la structure dominante de l'écoulement (Goodman & Xu 1994). Ainsi, au bout d'un certain temps, ce mode se casse, et engendre *in fine* une structure tridimensionnelle typique d'un écoulement turbulent (Fig. 82).

Cet écoulement de canal est responsable des bouffées turbulentes à croissance linéaire que l'on peut observer dans certaines courbes temporelles [Voir par ex. Fig. (80)]. Dans le cas de simulations essentiellement composées de ce genre de structures, la moyenne statistique n'a



**Fig. 81.** Moyenne cumulée des coefficients de transport pour une simulation  $\beta = 100$ ,  $Re = 1600$ . On remarque que la valeur finale est convergée à 10%, ce qui est suffisant.

plus beaucoup de sens, ce que l'on peut vérifier sur les moyennes cumulées. Dans ce cas, nous étudierons de préférence les courbes d'évolution temporelles plutôt que les statistiques.

## 2. Influence du champ magnétique sur la saturation

### § 81. Dépendance générale $\alpha(\beta)$

Je propose dans cette partie une étude du comportement de la turbulence engendrée par la MRI en fonction du champ vertical imposé. Je vais en particulier m'intéresser au cas où le champ magnétique est « fort », c'est-à-dire au voisinage du point de stabilité marginal (75.292). Ce point a un fort intérêt astrophysique dans la mesure où on s'attend à ce que les phénomènes d'accrétion-éjection se situent dans cette limite. Dans un premier temps, on peut étudier la dépendance générale du coefficient de transport en fonction de  $\beta$  sur une large gamme (Fig. 83).

Tout d'abord, remarquons que pour  $\beta$  grand, la courbe  $\alpha(\beta)$  semble avoir un comportement asymptotique de la forme :

$$\alpha \simeq 11,5\beta^{-0.73} \quad \text{si } \beta > 400 \quad (81.323)$$

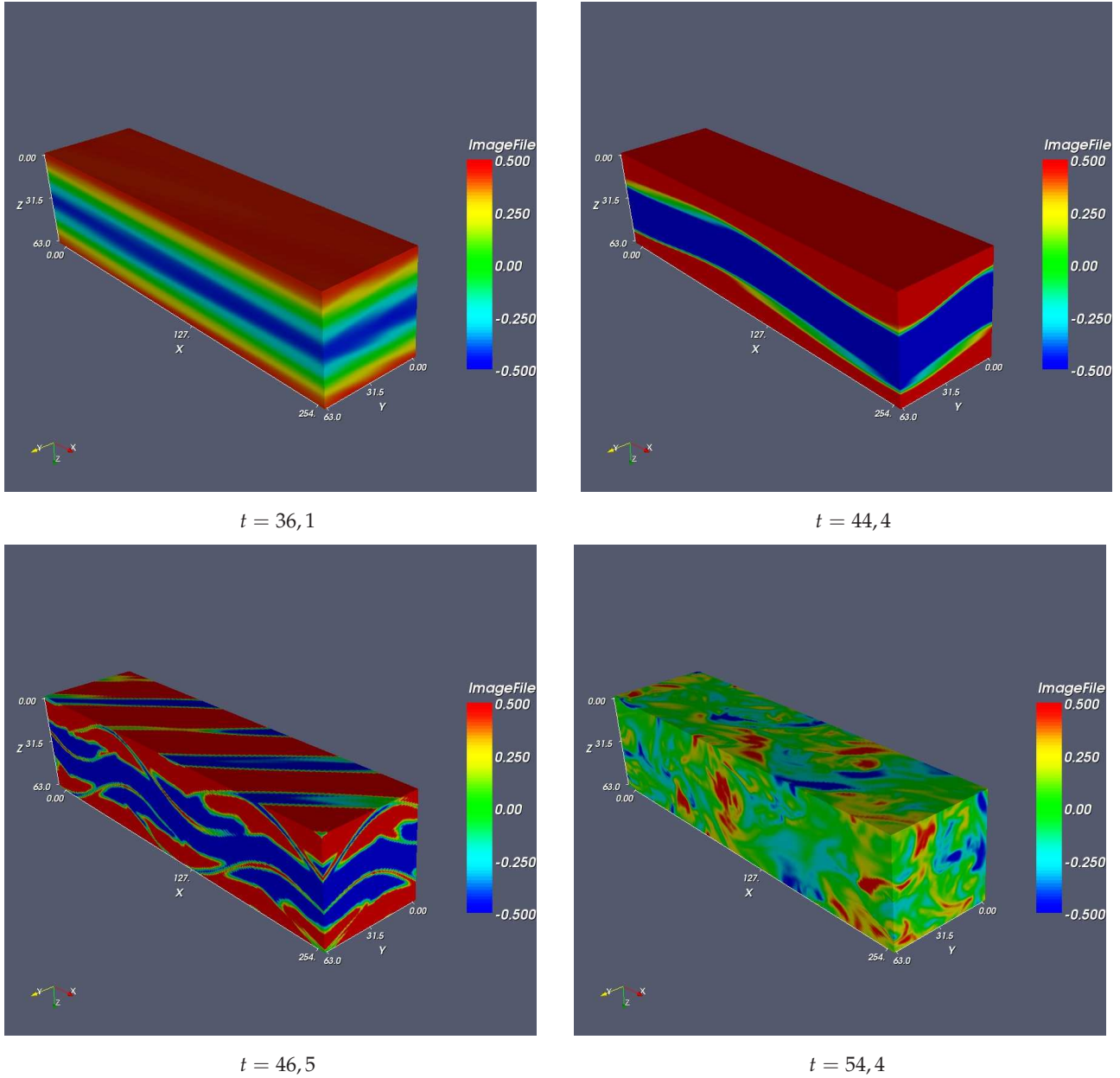
Ce comportement est sensiblement différent du comportement que l'on peut dériver de Hawley *et al.* (1995) avec  $\alpha \simeq 3\beta^{1/2}$ . Notons cependant que sur le domaine commun entre nos études, les valeurs finales ne diffèrent que de 30 %, ce qui reste raisonnable compte tenu des autres sources d'erreur discutées précédemment.

Par ailleurs, on pourra remarquer sur ce graphique que le point  $\beta = 30$  a un comportement singulièrement différent du reste des simulations. En fait, la simulation  $\beta = 30$  fait apparaître des bouffées turbulentes très violentes, formées par un fort écoulement de canal (Fig. 84). Je vais donc essayer de préciser la région de l'espace des paramètres où ce comportement apparaît et quelles sont ses caractéristiques.

### § 82. Limite en champ magnétique fort

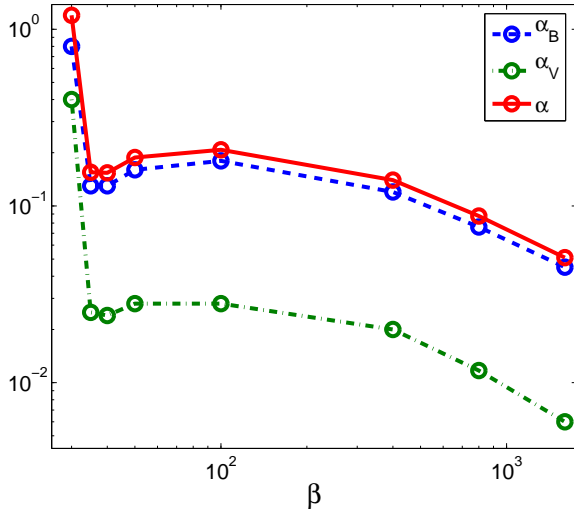
Comme on l'aura remarqué, la limite  $\beta = 30$  est très proche du seuil d'instabilité théorique (Eq.75.292). De plus, le comportement en bouffées turbulentes semble indépendant du Reynolds



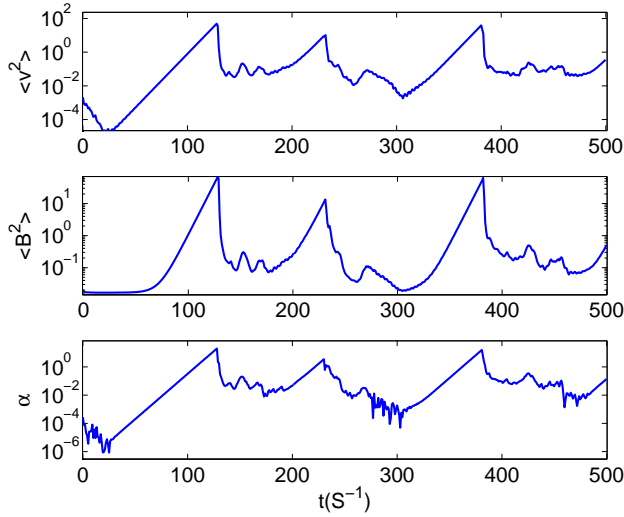


**FIG. 82.** Mise en évidence de l'écoulement de canal dans une simulation numérique pour  $\beta = 50$  et  $Re = 2000$   $Pm = 1$  (tracé de  $v_y$ ). On observe la croissance du mode  $k_z = 2\pi/H$ , solution non linéaire des équations, puis l'apparition d'instabilités parasites ( $t = 44,4$ ), qui entraînent la destruction du mode et l'apparition d'une turbulence tridimensionnelle développée.

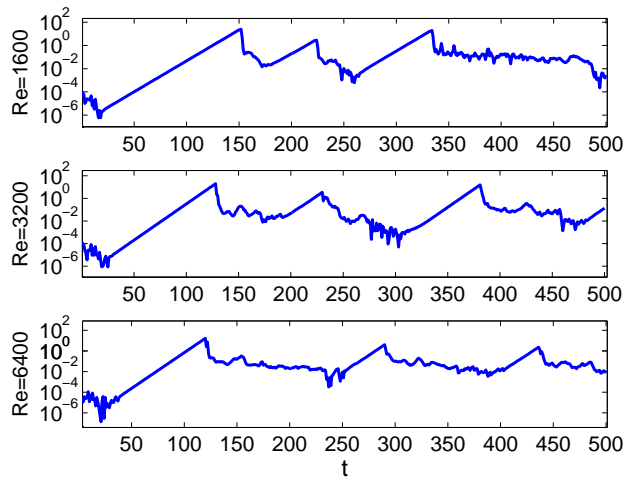
(Fig. 85), ce qui suggère qu'il pourrait avoir lieu dans les disques d'accrétions. Ainsi, par analogie hydrodynamique, on peut l'analyser comme l'état intermédiaire entre l'état de turbulence développée et l'état laminaire, où l'on observe la formation de modes structurés à grande échelle. Cependant, ici, ce n'est pas le Reynolds qui est le paramètre de contrôle mais bien l'intensité du champ magnétique  $\beta$ . On s'attend donc naturellement à ce que le phénomène s'estompe à mesure que le champ magnétique diminue, de même que la turbulence se développe lorsque le Reynolds augmente dans un écoulement. On peut alors s'interroger sur la largeur de la zone de



**FIG. 83.** Moyenne des coefficients du transport en fonction de l'intensité du champ magnétique  $\beta$  pour  $Re = 1600$ ,  $Pm = 1$ . On remarque que le point  $\beta = 30$  se distingue par un transport extrêmement élevé comparativement aux autres simulations ( $\alpha = 1, 2$ ).



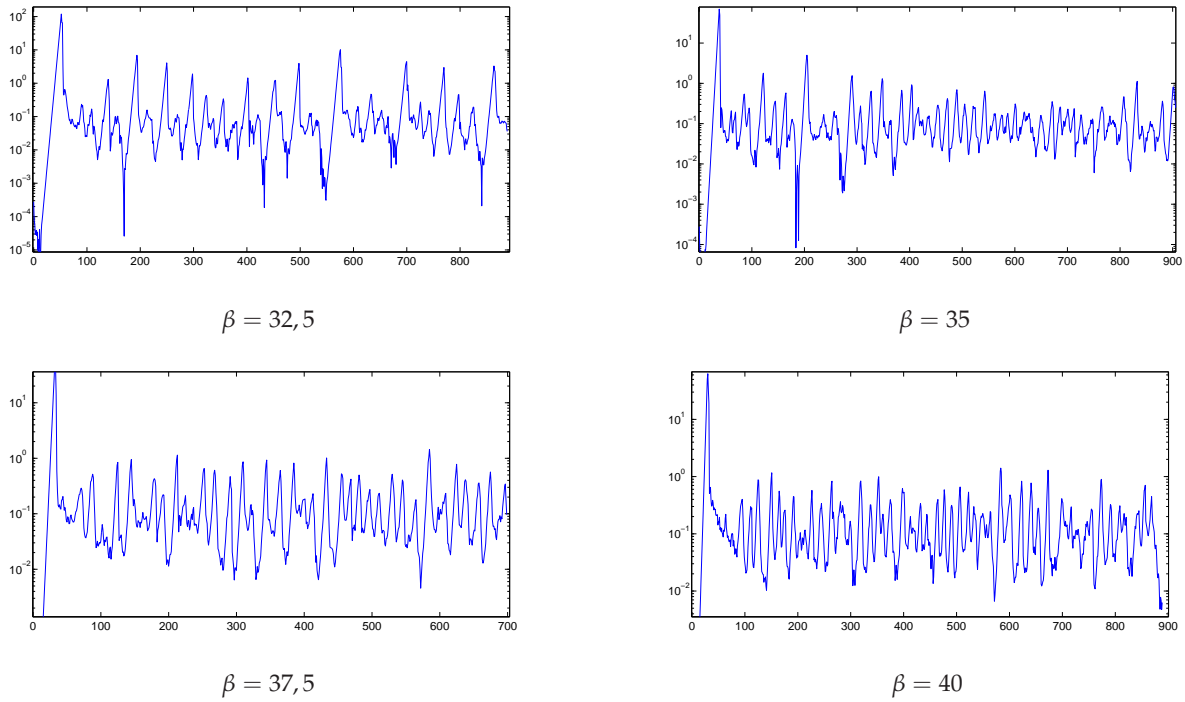
**FIG. 84.** Courbes temporelles d'une simulation  $\beta = 30$ ,  $Re = 1600$ . On remarque la présence de bouffées turbulentes dues à la formations de forts écoulements de canal dont la destruction par une instabilité secondaire intervient très tardivement.



**FIG. 85.** Tracé du coefficient de transport  $\alpha$  pour des simulations à  $\beta = 30$ ,  $Re = 1600, 3200, 6400$  et  $Pm = 1$ . Il semble que le comportement observé initialement sur la figure (84) est indépendant du nombre de Reynolds.

transition entre la stabilité marginale ( $\beta = 29,5$ ) et l'état de turbulence développée qui apparaît au moins dès  $\beta = 100$ .





**FIG. 86.** Évolution du phénomène de bouffée turbulente lorsque l'on s'éloigne du point de stabilité marginale  $\beta = 29,5$  pour  $Re = 1600$ .

Pour étudier cette transition, on réalise une série de simulations de 1000 temps de cisaillement (Fig. 86) en faisant varier l'intensité du champ magnétique. On remarque alors que le phénomène est fortement atténué pour  $\beta = 32,5$  et semble disparaître dès  $\beta = 35$ . Ainsi, on retrouve ce phénomène dans une région étroite au voisinage du point de stabilité marginale, que l'on définit par :

$$\beta_c < \beta < 1.15\beta_c \quad (82.324)$$

### § 83. Bouffées turbulentes : phénomène physique ou numérique?

Comme je viens de le montrer de manière semi-quantitative, le phénomène de bouffée turbulente apparaissant en champ fort est assez violent. Les dynamiques mises en jeu pour les quantités telles que le transport, le champ magnétique ou encore le transport sont énormes (parfois  $10^{10}$ !), ce qui laisse penser qu'il pourrait s'agir d'un phénomène numérique. Cependant, on retrouve un comportement similaire à bas Reynolds avec un champ magnétique faible (Fig. 80). De plus, un comportement semblable est détecté par Fleming *et al.* (2000) (figures 2 et 4) pour des Reynolds magnétiques faibles ( $Rm = 260$ ). Ainsi, comme je l'avais précédemment, il semble que ce comportement soit plutôt la signature de la MRI au voisinage d'un seuil d'instabilité, et donc que le résultat ainsi obtenu reflète, au moins en partie, un phénomène physique.

Cependant, toutes les simulations de ce chapitre, de même que celles de Fleming *et al.* (2000), ont été effectuées en utilisant des boîtes de simulations cartésiennes, avec des conditions aux limites shearing sheet et en négligeant la stratification. Cette remarque est importante car on s'attend naturellement à ce que le mode de canal soit favorisé par les conditions aux limites

verticales et radiales utilisées. On peut ainsi supposer qu'une stratification verticale perturbera l'écoulement de canal, et engendrera plus facilement des instabilités parasites. Par ailleurs, on remarquera que cet écoulement possède une longueur de cohérence « infinie » dans chacune des directions<sup>27</sup>  $x$  et  $y$ . Les conditions aux limites périodiques dans ces directions jouent alors un rôle extrêmement important car elles autorisent une communication instantanée entre les deux cotés de l'écoulement, ce qui n'est pas le cas dans un disque réel. Ainsi, le rôle des conditions aux limites reste flou, et il serait intéressant de tester des conditions aux limites rigides (Couette plan tournant magnétisé) pour vérifier l'influence de ces dernières.

Enfin, notons que les coefficients de transport et d'énergie cinétique impliquent l'existence de mouvements à des vitesses supersoniques lors des bouffées turbulentes<sup>28</sup>. Le code étant incompressible, des effets d'instabilités secondaires dues à des effets compressibles ne sont pas pris en compte. En particulier, on pourrait s'attendre à une dissipation accrue au sommet des pics de transport due à la formation d'ondes de choc. Il serait alors intéressant d'étudier le même effet en utilisant un code prenant en compte les effets de compressibilité de manière adéquate et de comparer les résultats compressibles et incompressibles. Dans tous les cas, il semble clair que les valeurs maximales du transport que l'on peut obtenir d'après la figure (84) ne sont pas exactes, et il ne serait pas impossible d'obtenir des valeurs dix fois plus faible avec un code compressible.

En conclusion, il semble que le phénomène de bouffée turbulente soit effectivement un phénomène physique dont les caractéristiques restent à déterminer. Il apparaît cependant qu'il doit être exacerbé par les méthodes numériques que j'ai employées ici, et, avant d'arriver à une conclusion astrophysiquement pertinente, il faudra tester le rôle des conditions aux limites, de la stratification et de la compressibilité. Notons enfin que si de tels phénomènes sont effectivement pertinents pour la physique des disques d'accrétion, le modèle du disque  $\alpha$  est totalement inutilisable, et un modèle de transport dépendant explicitement du temps sera requis.

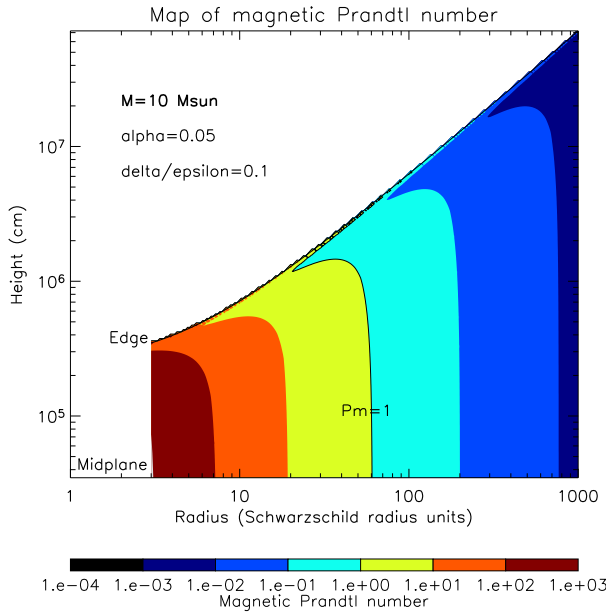
### 3. Influence de la dissipation sur la saturation

#### § 84. Rôle du nombre de Prandtl

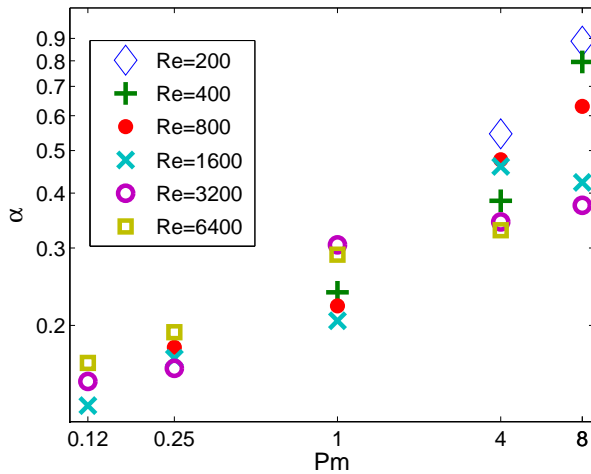
Comme je le rappelais au chapitre précédent, on trouve très peu de travaux numériques sur la saturation de la MRI prenant en compte les effets dissipatifs. Comme je l'ai fait remarquer au début de ce chapitre, un changement des deux coefficients de dissipation en conservant constant le nombre de Prandtl semble avoir un faible impact sur les quantités statistiques, une fois l'état de turbulence développée atteint. Néanmoins, on peut s'interroger sur le rôle du nombre de Prandtl sur l'efficacité de la turbulence. Cette question est d'autant plus pertinente que ce nombre sans dimension varie énormément suivant les objets étudiés. Ainsi, Brandenburg & Subramanian (2005) suggèrent des valeurs allant de  $Pm \sim 10^{-5}$  dans les étoiles jeunes jusqu'à  $Pm \sim 10^4$  dans les noyaux actifs de galaxie. D'autres modèles (Henri & Balbus, communication privée) suggèrent une évolution prononcée du nombre de Prandtl à l'intérieur même d'un disque d'accrétion (Fig. 87). Ainsi, pour étudier une telle dépendance, j'ai effectué une série de simulations obtenues pour divers couple  $(Pm, Re)$  à  $\beta = 100$  (Fig. 88).

<sup>27</sup>En pratique, les longueurs de corrélation deviennent égales à la taille de boîte.

<sup>28</sup>Dans un disque en équilibre hydrostatique vertical, on a  $SH \simeq c_s$ . Ainsi, lorsque la vitesse des perturbations est supérieure à  $SH$ , on peut estimer que les mouvements seront supersoniques dans un vrai disque.



**FIG. 87.** Évolution du nombre de Prandtl dans un disque d'accrétion autour d'un trou noir de 10 masses solaires. (Crédit Henri & Balbus)



**FIG. 88.** Évolution du transport moyen ( $\alpha$ ) en fonction du nombre de Prandtl pour différentes valeurs du Reynolds. Toutes les simulations sont effectuées à  $\beta = 100$ .

On remarquera sur cette figure la forte corrélation entre le coefficient de transport  $\alpha$  et le nombre de Prandtl. Dans le domaine en  $Pm$  considéré, on pourra noter cette relation sous la forme :

$$\alpha \propto Pm^\delta \quad \text{pour} \begin{cases} 0.12 < Pm < 8 \\ 200 < Re < 6400 \end{cases} \quad (84.325)$$

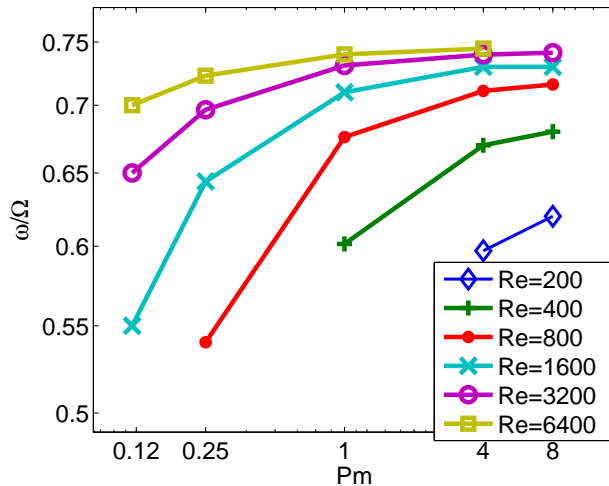
avec  $\delta \sim 0,35$ . On remarquera que cette relation est vraie lorsque le Reynolds et le Reynolds magnétique varient *indépendamment*. Ainsi, on montre que la dépendance du coefficient  $\alpha$  vis-à-vis des phénomènes dissipatifs considérés ici se fait essentiellement via le nombre de Prandtl. Ce type de relation, redécouverte ici mais initialement suggérée par Balbus & Hawley (1998), se voit donc confirmée. Par ailleurs, on retrouve le résultat discuté précédemment sur l'effet du Reynolds à  $Pm$  constant en remarquant la faible dispersion verticale pour chacun des nombres de Prandtl considérés.

On notera cependant une dispersion plus forte pour  $Pm = 8$ , qui peut être expliquée par des effets numériques, dus à une résolution trop faible ( $Pm = 8$  et  $Pm = 3200$  impliquent  $Rm = 25600$  ce qui est au dessus du pouvoir de résolution estimé du code). Ainsi, en fixant comme borne supérieur de résolution  $Rm = 6400$ , on estimera que les simulations  $Pm = 4, Re = 6400, 3200$  et  $Pm = 8, Re = 3200, 1600$  sont sous résolues. Des résultats préliminaires à très haute résolution ont tendance à confirmer ce résultat en montrant des transports plus forts pour des simulations avec les mêmes paramètres physiques. Cependant, les temps de calculs extrêmement longs nous empêchent d'avoir une statistique suffisante pour pouvoir parler de résultat définitif.

La corrélation mise en avant ici doit probablement avoir de fortes implications pour la physique des disques. Cependant, il faut pouvoir étendre la courbe de la figure (88) sur plusieurs ordres de grandeurs, ce qui n'a rien d'évident. Notons tout d'abord que les problèmes de résolution numérique imposent de rester systématiquement au voisinage de  $Pm = 1$ . Ainsi, la seule possibilité pour obtenir une extrapolation convenable de ce résultat est de trouver une description physique satisfaisante de la corrélation observée numériquement.

### § 85. Comparaison avec le taux de croissance linéaire

Une idée apparemment répandue dans la communauté astrophysique est que l'intensité de la turbulence est directement reliée au taux de croissance du mode le plus instable. Par cette affirmation, on sous entend qu'une instabilité forte engendrera nécessairement des fluctuations fortes et sera donc plus efficace. Dans le cas présent, il peut être tentant de tester cette hypothèse sur la corrélation  $Pm - \alpha$ . Ainsi, en utilisant les résultats du chapitre précédent, et en particulier en résolvant numériquement l'équation (76.315), on peut obtenir facilement le taux de croissance de l'instabilité<sup>29</sup> pour les  $Pm$  et  $Re$  utilisés dans les simulations. La figure (89) montre un tel tracé, en utilisant les même notations que la figure (88).



**FIG. 89.** Taux de croissance linéaire du seul mode linéairement instable pour  $\beta = 100$ , avec les valeurs de résistivité et viscosité utilisées dans les simulations de la figure (88).

On remarque immédiatement en comparant les figures (88) et (89) que la corrélation  $Pm - \alpha$  ne peut être expliquée avec les taux de croissance linéaires. En particulier, on notera la forte influence du nombre de Reynolds à  $Pm$  constant, en contradiction avec les résultats

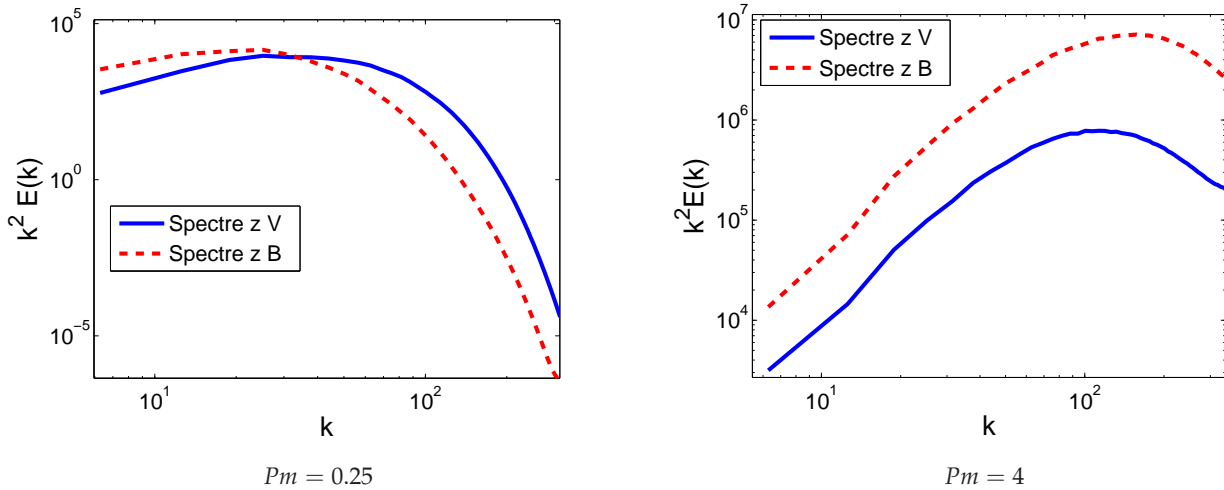
<sup>29</sup>Dans le cas  $\beta = 100$ , le seul mode linéairement instable est le mode  $k_z = 2\pi$ , ce qui correspond donc au taux de croissance du plus grand mode

précédents. Par ailleurs, la dépendance vis-à-vis du nombre de Prandtl semble relativement faible, contrairement à l'effet que l'on cherche à décrire.

On voit donc clairement que l'explication de l'effet  $Pm - \alpha$  tient à la dynamique non linéaire du phénomène, beaucoup moins facile à analyser.

### § 86. Analyse spectrale

Par analogie avec la théorie de Kolmogorov, on voit aisément que les deux phénomènes dissipatifs apparaissant dans la turbulence définissent deux échelles de dissipations distinctes. La viscosité définit une échelle de dissipation pour le champ de vitesse, et la résistivité une échelle de dissipation du champ magnétique. En suivant cette idée, on peut tracer les spectres de dissipation ( $k^2 E(k)$ ) des écoulements turbulents dans le cas  $Pm > 1$  et  $Pm < 1$  (Fig. 90).



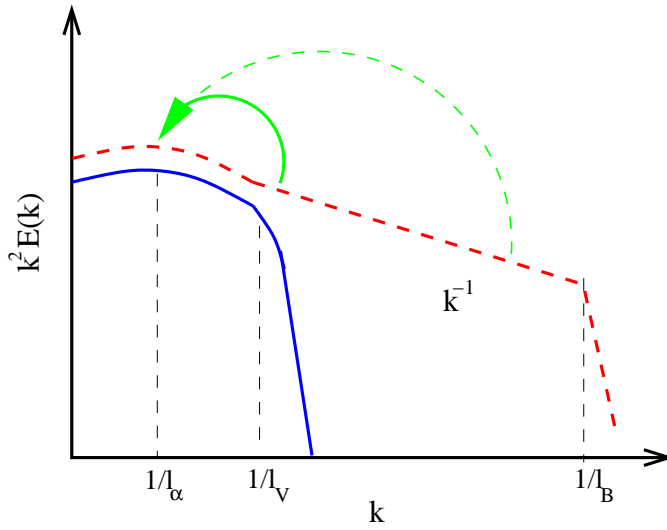
**FIG. 90.** Tracé des spectres de dissipation pour des écoulements turbulents avec  $Pm = 0,25$  et  $Pm = 4$ ,  $Re = 3200$ . On remarque que la taille relative des échelles de dissipation est liée au nombre de Prandtl.

On pourra alors définir une échelle de dissipation typique, associée au champ de vitesse ou au champ magnétique, comme étant l'échelle où l'on trouve le maximum de  $k^2 E(k)$ . On notera alors  $l_B$  l'échelle de dissipation magnétique et  $l_V$  l'échelle de dissipation du champ de vitesse. La figure (90) montre clairement que, conformément à l'intuition que l'on pouvait avoir, lorsque  $Pm < 1$ , on trouve  $l_B > l_V$  et inversement lorsque  $Pm > 1$ . Partant de cette observation, on peut élaborer un modèle préliminaire pouvant expliquer une partie de la corrélation  $Pm - \alpha$ .

Tout d'abord, remarquons que dans un écoulement turbulent, le champ magnétique et le champ de vitesse n'ont pas un comportement symétrique. En effet, le champ de vitesse peut casquer aux petites échelles par auto-interaction (terme  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ ), contrairement au champ magnétique. Ainsi, si on se place dans le cas où  $Pm \ll 1$ , on a alors  $l_B \gg l_V$ . Ainsi, d'un point de vue spectral, lorsque l'on a dépassé  $l_B$ , le champ magnétique se trouve dissipé, et, dans les plus petites échelles, seul le champ de vitesse est présent de manière significative. On observe alors une cascade hydrodynamique type Kolmogorov entre  $l_B$  et  $l_V$ . Si on suppose à présent  $Pm \gg 1$ , le schéma précédent n'est pas applicable de manière symétrique. Ainsi, lorsque l'on atteint l'échelle de dissipation du champ de vitesse, le champ magnétique devient prépondérant jusqu'à

sa propre échelle de dissipation. Cependant, il est incapable de créer de manière spontanée une cascade turbulente, et une interaction avec le champ de vitesse (*a priori* faible !) est nécessaire. On peut donc observer une forme d'accumulation d'énergie magnétique entre les échelles  $l_B$  et  $l_V$  lorsque  $Pm > 1$ .

Ce type de résultat a déjà été observé numériquement dans le cas de simulations de turbulence homogène (Cho *et al.* 2002). On observe alors un spectre magnétique en  $k^{-1}$  et un spectre de vitesse en  $k^{-4}$  entre les échelles  $l_B$  et  $l_V$  lorsque  $l_B < l_V$ . Si on suppose qu'un phénomène similaire se produit dans le cas de la turbulence induite par la MRI, on peut alors modéliser l'accroissement du transport avec le Prandtl sous la forme d'une cascade inverse de la région du spectre magnétique en  $k^{-1}$  sur les grandes échelles responsables du transport (Fig. 91).



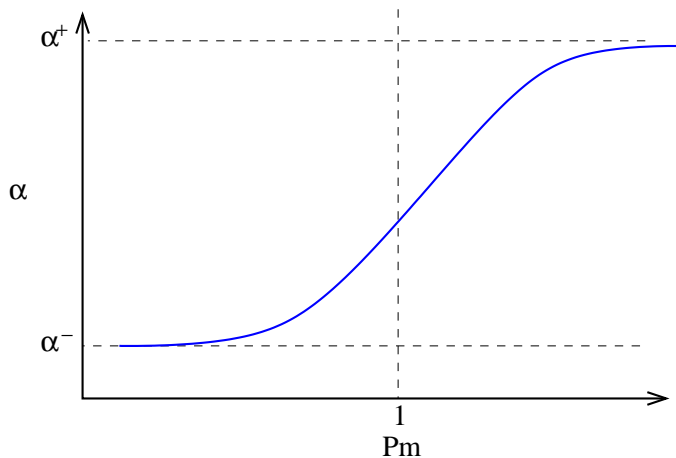
**FIG. 91.** Spectre turbulent hypothétique obtenu dans le cas  $Pm > 1$ . Le spectre magnétique est en tirets et le spectre de vitesse en trait plein. L'accumulation d'énergie entre les échelles  $l_B$  et  $l_V$  pourrait entraîner une réaction inverse sur les grandes échelles (flèches) ce qui expliquerait la corrélation  $Pm - \alpha$ .

Si ce schéma est vrai, on devrait alors observer plusieurs comportements caractéristiques. Remarquons tout d'abord que trois échelles caractéristiques interviennent dans cette modélisation : les deux échelles de dissipation  $l_V$  et  $l_B$ , ainsi que l'échelle caractéristique du transport  $l_\alpha$ , qui est supposée voisine de la taille de boîte. Considérons alors une échelle  $l$  dans le spectre du champ magnétique, comprise entre  $l_B$  et  $l_V$  avec  $l_V > l_B$  ( $Pm > 1$ ). Le modèle proposé suppose que l'interaction de l'échelle  $l$  avec l'échelle  $l_\alpha$  accroît le transport à l'échelle  $l_\alpha$ . Cette interaction ne pourra être efficace que lorsque les deux échelles  $l_\alpha$  et  $l$  ne seront pas trop éloignées. En effet, si les échelles sont très différentes, il sera difficile, voir impossible d'obtenir une cohérence de phase suffisante pour obtenir la réaction souhaitée. On peut alors envisager deux phénomènes distincts :

- Dans les simulations présentées ici, le Reynolds est assez faible, de sorte que  $l_V \sim l_\alpha$ . Gardons constant ce Reynolds dans un premier temps, et augmentons le nombre de Prandtl. Ce faisant, on diminue l'échelle  $l_B$  et on augmente de fait le domaine en  $k^{-1}$  du champ magnétique. Dans un premier temps, lorsque  $Pm = O(1)$ , les échelles introduites dans le spectre en  $k^{-1}$  restent voisines de  $l_V$  et donc de  $l_\alpha$ . Leur interaction avec les échelles de transport est donc efficace et on observe l'effet  $Pm - \alpha$ . Lorsque le Prandtl est suffisamment grand, c'est-à-dire  $l_B$  suffisamment petit, les échelles ajoutées ne peuvent plus avoir d'interaction efficace avec l'échelle  $l_\alpha$  en raison de l'argument précédent. L'effet  $Pm - \alpha$  doit donc saturer lorsque le Prandtl est suffisamment grand.

- Supposons à présent que l'on se place à un Reynolds suffisamment grand pour que  $l_V \ll l_\alpha$ . Dans ce cas, une augmentation du Prandtl à Reynolds constant rajoutera des échelles de tailles inférieures à  $l_V$ . L'interaction de ces dernières avec l'échelle  $l_\alpha$  ne pourra se faire et l'effet  $Pm - \alpha$  sera inexistant.

Si le schéma que je propose ici est correct, on devrait observer une saturation de l'effet  $Pm - \alpha$  à  $Pm$  suffisamment grand pour  $Re = O(10^3)$  ainsi qu'une disparition de cet effet pour  $Re \gg 10^3$ . Notons cependant que ce schéma n'explique pas le comportement de la figure (88) du côté  $Pm < 1$ . Néanmoins, on doit là aussi trouver une forme de saturation de l'effet  $Pm - \alpha$ . En effet, l'extrapolation de l'équation (84.325) montre que le transport doit tendre vers 0 lorsque l'on diminue  $Pm$ . Si on considère un écoulement où l'on fixe le Reynolds magnétique, la limite  $Pm \rightarrow 0$  correspond à  $Re \rightarrow \infty$ . Naturellement, dans cette limite, l'écoulement est toujours linéairement instable et on s'attend à ce que l'efficacité de la turbulence soit non nulle. Ainsi, à partir d'un certain régime, l'équation (84.325) doit être fautive tant du côté  $Pm$  grand que  $Pm$  petit. On peut donc imaginer une courbe *hypothétique*  $Pm - \alpha$  lorsque  $Pm$  varie sur un domaine suffisamment large pour observer les saturations décrites précédemment (Fig. 92). Un point intéressant serait alors d'évaluer les valeurs de saturation  $\alpha^+$  et  $\alpha^-$  afin d'obtenir un domaine typique (et probablement maximum) de variation de  $\alpha$  dû à l'effet  $Pm - \alpha$ .



**FIG. 92.** Allure générale de la courbe  $\alpha(Pm)$  à petit Reynolds en supposant une saturation de l'effet  $Pm - \alpha$ .

## 4. Cas sans champ magnétique vertical imposé

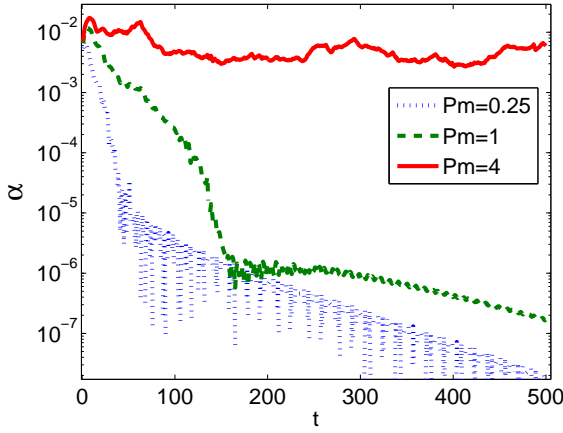
### § 87. Effets dissipatifs et existence de la turbulence

Les simulations précédentes ont été systématiquement effectuées avec un champ magnétique vertical imposé. On se plaçait ainsi dans le cadre de l'analyse linéaire du chapitre précédent. Cependant, d'autres topologies de champ magnétique sont possibles. En particulier, peu après la découverte de l'instabilité linéaire, il a été montré qu'une turbulence pouvait apparaître sans imposer un champ magnétique moyen dans la boîte de simulation (Hawley *et al.* 1995). On sort alors de l'analyse linéaire classique, et on fait intervenir un éventuel effet dynamo (Brandenburg *et al.* 1995) pour expliquer le maintien de la turbulence dans un écoulement.

Dans le cadre de cette étude, et en collaboration avec Sébastien Fromang, j'ai simulé ce type d'écoulement, en imposant une perturbation initiale du champ magnétique sous la forme d'un bruit blanc, avec un flux magnétique global nul à travers la boîte de simulation. A titre



d'exemple, j'ai tracé le coefficient de transport pour trois simulations dans lesquelles le nombre de Prandtl varie tout en gardant constant le nombre de Reynolds,  $Re = 6400$  (Fig. 93).



**FIG. 93.** Tracé de l'évolution du coefficient de transport  $\alpha$  en fonction du temps pour des simulations avec  $B_0 = 0$  et  $Re = 6400$ . Un nombre de Prandtl inférieur ou égal à 1 semble éliminer l'instabilité. On retrouve des résultats similaires pour  $Re = 1600$  et  $Re = 3200$ .

De manière surprenante, la turbulence semble disparaître pour  $Pm \leq 1$ . Des simulations similaires, effectuées à des Reynolds différents montrent un comportement identique ( $Re = 1600$ ,  $Re = 3200$ ). Par ailleurs l'utilisation du code différences finies Zeus3D, avec des intégrations sur 5000 temps de cisaillement et une exploration complète de l'espace des paramètres semblent montrer un résultat similaire (Fromang *et al.* 2007). Comment alors expliquer les nombreuses simulations sans flux net observées dans la littérature ? L'étude des spectres de telles simulations où l'on néglige les termes de dissipation semble montrer que l'on peut définir un nombre de Prandtl numérique, basé sur le rapport des échelles de dissipation numériques magnétique et cinétiques. Pour le code Zeus, il semblerait que le nombre de Prandtl numérique soit voisin de 4, ce qui expliquerait le succès rencontré par ce code pour obtenir des simulations turbulentes sans flux net. Par ailleurs, il semblerait que cette caractéristique soit partagée par la plupart des codes aux différences et volumes finis. En effet, on s'attend naturellement à une viscosité numérique plus élevée que la résistivité en raison des termes de transport du champ de vitesse dus au cisaillement moyen.

Ainsi, cet exemple montre encore une fois que les termes dissipatifs jouent un grand rôle dans la compréhension de la turbulence dans les disques d'accrétion. On voit ici qu'il peuvent aller jusqu'à un résultat totalement contraire à ce qui est régulièrement trouvé dans la littérature, ce qui peut être assez inquiétant. A l'avenir, il semble donc primordial de contrôler ces termes dissipatifs, en utilisant une approche telle que celle proposée ici.

Remarquons enfin que les causes physiques de l'effet dynamo observé dans ces écoulements, et en particulier la disparition du processus pour des Prandtl plus petits que 1 restent obscures. Ce point mériterait d'être étudié en détail, car un tel processus dynamo pourrait éventuellement engendrer un champ à grande échelle, utilisable pour l'éjection et la collimation des jets astrophysiques.

## 5. Conclusion

Malgré une littérature assez abondante sur le sujet, il semble que l'instabilité magnéto-rotationnelle n'ait pas encore livré tous ses secrets. Comme dans la partie consacrée à l'instabilité sous-critique, je me suis efforcé dans mon étude MHD de contrôler les phénomènes



dissipatifs qui avaient été jusque là partiellement ou totalement négligés. Non seulement ce type d'approche permet de s'assurer que les simulations convergent vers une solution physique, mais elles mettent en avant de nouveaux phénomènes, tels que l'effet  $Pm - \alpha$ , qui peuvent avoir un impact fort sur notre compréhension finale de la physique de l'accrétion en astrophysique, et même au-delà.

Par ailleurs, une exploration plus systématique de l'espace des paramètres a permis de mettre en évidence des bouffées turbulentes lorsque l'on est au voisinage du seuil d'instabilité en champ fort. Il est certain que ces résultats nécessitent des confirmations en raison des biais numériques que j'ai évoqués, mais aussi des problèmes physiques liés à la transposition des résultats numériques en géométrie cartésienne à un vrai disque d'accrétion. Ce phénomène offre néanmoins des perspectives intéressantes, notamment en raison de la période assez longue observée entre deux bouffées, qui pourrait peut-être expliquer certains phénomènes astrophysiques quasi-périodiques.

# Partie VI

## Conclusion et perspectives



## Conclusion et perspectives

**L**E BUT INITIAL DE CE TRAVAIL ÉTAIT d'obtenir une meilleure caractérisation de la turbulence pouvant apparaître dans les disques d'accrétion, afin d'aboutir à une description précise du transport turbulent. Pour ce faire, j'ai envisagé plusieurs instabilités comme sources potentielles de turbulence :

- **Instabilité sous-critique hydrodynamique.** Pour traiter le cas de cette instabilité, j'ai développé un code spectral, tridimensionnel et incompressible afin d'obtenir des simulations dans lesquelles la dissipation numérique était contrôlée. Ce code a permis de montrer que le transport turbulent induit par cette instabilité était très probablement trop faible pour expliquer le transport observé dans les disques.

Une des originalités de ce travail a été l'étude poussée des différents biais numériques : résolution, rapport d'aspect, conditions aux limites et algorithme d'intégration ont été modifiés pour tester leur impact sur le résultat final. De plus, j'ai utilisé de manière explicite une dissipation physique dans les simulations, ce qui a permis de mettre en évidence les problèmes de convergence et de les maîtriser.

Enfin, des résultats expérimentaux postérieurs à mes propres travaux (Ji *et al.* 2006) ont montré des conclusions similaires, signant probablement la fin de l'instabilité sous-critique comme source de turbulence dans les disques d'accrétion.

- **Instabilité strato-rotationnelle.** J'ai étudié cette instabilité hydrodynamique de manière essentiellement analytique, par une approche asymptotique. J'ai dans un premier temps dérivé un critère d'instabilité pour les solutions les plus simples, en considérant des conditions aux limites «variables», pouvant reproduire par exemple les conditions aux limites rigides ou libres. J'ai ainsi montré que ces solutions n'étaient pas pertinentes pour les disques d'accrétion, car très dépendantes des conditions aux limites radiales.

J'ai par la suite étudié les solutions dites «oscillantes» par un raccordement asymptotique à travers plusieurs domaines d'approximation. J'ai ainsi montré que ces solutions étaient instables lorsqu'elles étaient placées dans des conditions aux limites rigides.

Enfin, un code numérique aux différences finies d'ordre élevé, dont j'avais commencé le développement pour l'étude de l'instabilité sous-critique, a été utilisé. J'ai ainsi mis en évidence cette instabilité numériquement, et j'ai montré que l'abandon des conditions aux limites rigides pour des conditions shearing sheet entraînait la disparition de l'instabilité. Tous ces arguments tendent donc à montrer que cette instabilité est de nature globale, et peu ou pas pertinente d'un point de vue astrophysique.

Il reste cependant à obtenir un critère générique d'instabilité, qui soit indépendant du type de solution considéré. Ce critère permettrait alors d'obtenir une réponse définitive à la pertinence de la SRI dans les disques.

• **Instabilité magnéto-rotationnelle.** Pour débiter l'étude de cette instabilité, j'ai dérivé les critères d'instabilité linéaire dans différentes limites, en considérant une viscosité et une résistivité moléculaire. Ce type de critère n'est pas réellement nouveau, mais les limites analytiques obtenues permettent d'avoir un point de vue clair et complet sur le rôle des phénomènes dissipatifs dans cette instabilité.

J'ai poursuivi cette étude en développant une extension MHD du code spectral utilisé pour l'instabilité sous-critique. Suivant la logique de ce premier travail, j'ai cherché à comprendre quel était le rôle des nombres sans dimensions sur le processus de saturation de la MRI. J'ai ainsi montré un phénomène de bouffées turbulentes apparaissant au voisinage du seuil en champ fort de l'instabilité linéaire. Cependant, l'implication de ce résultat pour la physique des disques est encore obscure, et le rôle des conditions aux limites, de la compressibilité et de la stratification verticale restent à clarifier.

Je me suis enfin attaché à étudier le rôle des effets dissipatifs visqueux et résistifs sur la saturation de la turbulence MRI, ce qui avait été jusqu'à présent négligé. Bien que la saturation semble dépendre peu des effets dissipatifs à Prandtl constant, il semble que la variation de ce dernier entraîne des variations notables du coefficient de transport. De plus, dans le cas sans champ magnétique vertical imposé, il semble que la turbulence disparaisse dans les cas où  $Pm \lesssim 1$ . Ce point met alors en doute une partie de la littérature utilisant cette topologie du champ magnétique sans contrôler les effets dissipatifs.

Les implications astrophysiques de ces résultats sont encore à discuter, notamment en raison des facteurs d'échelle mis en jeu entre les simulations et les disques d'accrétion réels. Il n'en reste pas moins qu'une compréhension approfondie du phénomène de saturation de la MRI, en fonction notamment des paramètres sans dimensions contrôlant la dissipation, semble être un point *sine qua non* pour pouvoir développer un jour un modèle physiquement pertinent de transport turbulent dans les disques.

Vu ces résultats, plusieurs pistes de recherches peuvent être proposées :

- Étudier les effets de la stratification sur le phénomène de bouffée turbulente. Dans ce but, j'ai développé une version MHD du code différences finies utilisé ici. Remarquons cependant que la présence d'un champ magnétique vertical dans un écoulement stratifié pose de nombreux problèmes numériques (voir par exemple Stone *et al.* 1996) qu'il conviendra de résoudre.
- Créer un modèle sous maille type LES (*Large Eddy Simulation*) avec des simulations numériques locales, afin de pouvoir incorporer les effets de la turbulence dans des simulations à grande échelle. Ce type d'approche présente cependant plusieurs difficultés. En effet, les approches LES ont été beaucoup moins développées et testées dans le cas MHD que dans le cas hydrodynamique. Il faudra donc probablement créer de nouveaux modèles de clôture sous-maille si on envisage une telle approche. De plus, les simulations numériques locales actuelles ne sont pas suffisamment résolues pour montrer clairement un spectre inertiel, lequel est requis pour pouvoir utiliser la séparation d'échelle d'une LES. Aussi, des moyens numériques très performants seront nécessaires pour utiliser cette approche dans les disques d'accrétion.
- Étudier l'effet dynamo potentiellement à l'œuvre dans la MRI. Les simulations numériques sans flux net semblent montrer que l'instabilité survit et maintient des

fluctuations de champ magnétique pendant plusieurs milliers de temps dynamique lorsque  $Pm > 1$ . Un point important serait de savoir s'il s'agit là d'un réel effet dynamo, et, si tel est le cas, si cet effet peut être à l'origine d'un champ magnétique à grande échelle, susceptible d'être le vecteur des phénomènes d'éjection et de collimation des jets.

---



# Partie VII

## Annexes





# L'approximation de Hill

## Plan du chapitre

1. Dérivation du modèle local de Hill .....	185
§ 88. Pression et tension magnétique .....	185
§ 89. Développement des équations en coordonnées cylindriques .....	185
§ 90. Approximations .....	186

## 1. Dérivation du modèle local de Hill

### § 88. Pression et tension magnétique

Tout d'abord, notons que dans le système d'équations MHD, on peut réécrire la force de Lorentz ainsi que l'équation d'induction sous la forme :

$$\frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi} = -\nabla \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \quad (88.326)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \eta \Delta \mathbf{B} \quad (88.327)$$

La force de Lorentz fait ainsi apparaître un terme de pression magnétique et un terme de tension magnétique agissant lorsque les lignes de champ sont courbées. De plus on obtient pour l'équation d'induction une formulation reflétant, d'une part, le transport du champ magnétique par le champ de vitesse, et d'autre part, un terme d'élongation des tubes de champ, similaire à l'équation de vorticité que l'on peut obtenir en hydrodynamique.

### § 89. Développement des équations en coordonnées cylindriques

On se place dans un référentiel cylindrique  $(r, \phi, z)$  avec pour origine l'objet central et l'axe vertical perpendiculaire au plan médian du disque d'accrétion. On ajoute de plus à l'équation du mouvement (7.49) un potentiel gravitationnel d  à l'objet central<sup>30</sup>  $\psi(r, z)$ . La projection sur

<sup>30</sup>Le potentiel d'auto gravité dû au disque sera négligé en raison de la très faible masse du disque comparativement à l'objet central (Lin & Papaloizou 1996).

les trois composantes  $e_r, e_\phi, e_z$  de l'équation du mouvement (7.49) donne alors :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) V_r - \frac{V_\phi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla B_r - \frac{B_\phi^2}{4\pi\rho r} + \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{T})_r \end{aligned} \quad (89.328)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) V_\phi + \frac{V_\phi V_r}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla B_\phi + \frac{B_\phi B_r}{4\pi\rho r} + \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{T})_\phi \end{aligned} \quad (89.329)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) V_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla B_z + \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{T})_z \end{aligned} \quad (89.330)$$

La même procédure appliquée à l'équation d'induction permet d'obtenir :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) B_r = \left( \mathbf{B} \cdot \nabla \right) V_r - B_r \nabla \cdot \mathbf{V} + \eta (\Delta \mathbf{B})_r \quad (89.331)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) B_\phi + \frac{V_\phi B_r}{r} = \left( \mathbf{B} \cdot \nabla \right) V_\phi + \frac{B_\phi V_r}{r} - B_\phi \nabla \cdot \mathbf{V} + \eta (\Delta \mathbf{B})_\phi \quad (89.332)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) B_z = \left( \mathbf{B} \cdot \nabla \right) V_z - B_z \nabla \cdot \mathbf{V} + \eta (\Delta \mathbf{B})_z \quad (89.333)$$

## § 90. Approximations

On supposera que l'équilibre du disque est dominé par la force gravitationnelle radiale et la force centrifuge, ce qui permet d'obtenir  $(V_\phi)^2/r = \partial\psi/\partial r$ . Remarquons que cette hypothèse est cohérente avec les observations de disques montrant à un très bon niveau d'approximation un profil de vitesse Képlerien (Lin & Papaloizou 1996).

Pour développer le système de Hill, on se place à un point de référence situé à un rayon  $R_0$ , et associé à une fréquence orbitale  $\Omega_0 = V_\phi^0/R_0$ . De plus, on utilisera le référentiel tournant avec le point de référence en posant :

$$r' = r \quad \phi' = \phi - \Omega_0 t \quad z' = z \quad (90.334)$$

La vitesse  $V$  est alors décomposée sous la forme  $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \Omega_0 r e_\phi$ , où  $\mathbf{U}$  peut être interprété comme l'écart à la vitesse képlerienne en  $R_0$ , que l'on supposera petite. Par ailleurs, on néglige les effets de courbure, en supposant que les quantités varient sur une échelle  $H \ll R_0$  et que l'on se place au voisinage immédiat de  $R_0$ , soit  $H \sim r - R_0$ . A l'ordre le plus élevé en  $U$ , on écrit

finalement pour l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{U} \cdot \nabla\right) U_r - 2\Omega_0 U_\phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial r} + \Omega_0 r^2 \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla B_r + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathcal{T}_r \end{aligned} \quad (90.335)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{U} \cdot \nabla\right) U_\phi + 2\Omega_0 U_r &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial \phi'} \left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla B_\phi + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathcal{T}_\phi \end{aligned} \quad (90.336)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{U} \cdot \nabla\right) U_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z'} \left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial z'} \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla B_z + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathcal{T}_z \end{aligned} \quad (90.337)$$

et l'équation d'induction :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla\right) B_r = (\mathbf{B} \cdot \nabla) U_r - B_r \nabla \cdot \mathbf{U} + \eta \Delta B_r \quad (90.338)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla\right) B_\phi = (\mathbf{B} \cdot \nabla) U_\phi - B_\phi \nabla \cdot \mathbf{U} + \eta \Delta B_\phi \quad (90.339)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla\right) B_z = (\mathbf{B} \cdot \nabla) U_z - B_z \nabla \cdot \mathbf{U} + \eta \Delta B_z \quad (90.340)$$

$$(90.341)$$

Le terme de marée  $-\partial\psi/\partial r + \Omega_0^2 r$  peut alors être simplifié en considérant l'équilibre radial  $\partial\psi/\partial r = r\Omega^2(r)$  et en développant au premier ordre en  $R_0 - r$ . On obtient alors :

$$-\frac{\partial \psi}{\partial r} + \Omega_0^2 r = -2\Omega_0 R_0 (r - R_0) \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)_{R_0} \quad (90.342)$$

Pour finir, on reformule le système précédent en considérant que le référentiel est cartésien dans la limite  $r - R_0 \ll R_0$ . On utilise alors la notation :

$$x = R_0 \phi' \quad y = (r - R_0) \quad z = -z, \quad (90.343)$$

de façon à se ramener aux notations utilisées en hydrodynamique pour les écoulements de Couette tournants. On obtient finalement le système précédent sous sa forme condensée :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla\right) \mathbf{U} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} + 2\Omega_0 S y \mathbf{e}_y \\ &- 2\Omega_0 \times \mathbf{U} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_z + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathcal{T} \end{aligned} \quad (90.344)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} \quad (90.345)$$

où l'on a noté  $S = -(rd\Omega/dr)_{R_0}$  le cisaillement moyen de l'écoulement laminaire  $U_x = Sy$ , solution des équations précédentes. Dans le cas incompressible, on pourra écrire  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  de sorte que le terme de viscosité se simplifie sous la forme  $1/\rho \nabla \cdot \mathcal{T} = \nu \Delta \mathbf{V}$  où on définira la viscosité cinématique  $\nu = \eta_v/\rho$ .



# Quelques formules d'intégration numérique

## Plan du chapitre

1. Formules aux différences finies .....	189
§ 91. Formules centrées .....	189
§ 92. Formules upwind .....	190
2. Algorithme de Runge-Kutta .....	190

Les formules présentées ici sont tirées de Press *et al.* (2002), Brandenburg (2003) et Canuto *et al.* (1988). Elles sont données dans ce manuscrit afin d'avoir une base complète et pratique pour étudier les schémas aux différences finies. On pourra néanmoins se reporter aux références proposées pour plus de détails sur la dérivation de ces formules.

## 1. Formules aux différences finies

### § 91. Formules centrées

Je présente ici les formules différences finies centrées, respectivement d'ordre 2, 4, 6, 8 et 10, et en considérant un pas de grille égal à  $\delta x$ . On obtient :

$$f'_i = (-f_{i-1} + f_{i+1}) / (2\delta x) \quad (91.346)$$

$$f'_i = (f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}) / (12\delta x) \quad (91.347)$$

$$f'_i = (-f_{i-3} + 9f_{i-2} - 45f_{i-1} + 45f_{i+1} - 9f_{i+2} + f_{i+3}) / (60\delta x) \quad (91.348)$$

$$f'_i = (3f_{i-4} - 32f_{i-3} + 168f_{i-2} - 672f_{i-1} + 672f_{i+1} - 168f_{i+2} + 32f_{i+3} - 3f_{i+4}) / (840\delta x) \quad (91.349)$$

$$f'_i = (-2f_{i-5} + 25f_{i-4} - 150f_{i-3} + 600f_{i-2} - 2100f_{i-1} + 2100f_{i+1} - \dots) / (2520\delta x) \quad (91.350)$$

pour les dérivées premières et :

$$f_i'' = (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) / (\delta x^2) \quad (91.351)$$

$$f_i'' = (-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}) / (12\delta x^2) \quad (91.352)$$

$$f_i'' = (2f_{i-3} - 27f_{i-2} + 270f_{i-1} - 490f_i + 270f_{i+1} - 27f_{i+2} + 2f_{i+3}) / (180\delta x^2) \quad (91.353)$$

$$f_i'' = (-9f_{i-4} + 128f_{i-3} - 1008f_{i-2} + 8064f_{i-1} - 14350f_i + 8064f_{i+1} - \dots) / (5040\delta x^2) \quad (91.354)$$

$$f_i'' = (8f_{i-5} - 125f_{i-4} + 1000f_{i-3} - 6000f_{i-2} + 42000f_{i-1} - 73766f_i + 42000f_{i+1} - \dots) / (25200\delta x^2) \quad (91.355)$$

pour les dérivées secondes.

## § 92. Formules upwind

Les formules upwind sont particulièrement utiles dans les équations d'advection, car elle permettent de dissiper les oscillations parasites qui peuvent apparaître au voisinage des forts gradients de vitesse ou de densité. Elles sont données ici pour le schéma d'advection lorsque la vitesse est positive. On retrouvera facilement leurs expressions lorsque la vitesse est négative par symétrie. Les formules données ci-après sont d'ordre respectif 1, 3, 4 et 6.

$$f_i' = (-f_{i-1} + f_i) / \delta x \quad (92.356)$$

$$f_i' = (2f_{i-2} - 12f_{i-1} + 6f_i + 4f_{i+1}) / (12\delta x) \quad (92.357)$$

$$f_i' = (-f_{i-3} + 6f_{i-2} - 18f_{i-1} + 10f_i + 3f_{i+1}) / (12\delta x) \quad (92.358)$$

$$f_i' = (f_{i-4} - 8f_{i-3} + 30f_{i-2} - 80f_{i-1} + 35f_i + 24f_{i+1} - 2f_{i+2}) / (60\delta x) \quad (92.359)$$

## 2. Algorithme de Runge-Kutta

On pourra trouver dans Press *et al.* (2002) une méthode de calcul générale de l'algorithme de Runge-Kutta. Retenons simplement que ce type de schéma explicite en temps permet d'obtenir une précision d'intégration d'ordre arbitrairement élevé. En pratique, on s'arrête souvent à l'ordre 4. Pour une équation différentielle du type :

$$\frac{d\psi}{dt} = \Delta(t, \psi), \quad (92.360)$$

les deux algorithmes de Runge-Kutta les plus connus s'écrivent :

- Schéma Runge-Kutta d'ordre 2

$$k1_i = \Delta(t, \psi_i^n)$$

$$k2_i = \Delta(t + \frac{\delta t}{2}, \psi_i^n + \frac{1}{2}k1_i)$$

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n + k2_i$$

- Schéma Runge-Kutta d'ordre 4

$$k1_i = \delta t \Delta(t, \psi_i^n)$$

$$k2_i = \delta t \Delta(t + \frac{\delta t}{2}, \psi_i^n + \frac{1}{2}k1_i)$$

$$k3_i = \delta t \Delta(t + \frac{\delta t}{2}, \psi_i^n + \frac{1}{2}k2_i)$$

$$k4_i = \delta t \Delta(t + \delta t, \psi_i^n + k3_i)$$

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n + \frac{1}{6}k1_i + \frac{1}{3}k2_i + \frac{1}{3}k3_i + \frac{1}{6}k4_i$$





# Relation de dispersion des modes exponentielles de la SRI.

## Plan du chapitre

§ 93. Dérivation de la relation de dispersion.....	193
--	-----

### § 93. Dérivation de la relation de dispersion

En utilisant les hypothèses de raccordement présentées au § 63.1, on écrit les conditions aux limites devant être vérifiées par les solutions (63.236) et (63.237). Comme le milieu (1) s'étend jusqu'à  $-\infty$ , on choisit les solutions du milieu (1) s'annulant pour  $y \rightarrow \infty$  (hypothèse de raccordement asymptotique). En supposant que  $k_{F_1} > 0$ , on obtient alors la condition  $A_1^- = 0$ . Un raisonnement similaire dans le milieu (3) mène à la condition  $A_3^+ = 0$ . Les conditions aux limites (62.230), (62.231), (62.234) et (62.235) permettent alors d'écrire le système d'équations :

$$0 = A_1^+ \rho_1 \exp(-k_{F_1} L/2) - A_2^+ \rho_2 \exp(-k_{F_2} L/2) - A_2^- \rho_2 \exp(k_{F_2} L/2) \quad (93.361)$$

$$0 = A_2^+ \rho_2 \exp(k_{F_2} L/2) + A_2^- \rho_2 \exp(-k_{F_2} L/2) - A_3^- \rho_1 \exp(-k_{F_1} L/2) \quad (93.362)$$

$$0 = A_1^+ (\omega_c \alpha + k_{F_1} (\omega + \omega_s)) \exp(-k_{F_1} L/2) \quad (93.363)$$

$$- A_2^+ (\omega_c \alpha + k_{F_2} (\omega + \omega_s)) \exp(-k_{F_2} L/2)$$

$$- A_2^- (\omega_c \alpha - k_{F_2} (\omega + \omega_s)) \exp(k_{F_2} L/2)$$

$$0 = A_2^+ (\omega_c \alpha + k_{F_2} (\omega - \omega_s)) \exp(k_{F_2} L/2) \quad (93.364)$$

$$+ A_2^- (\omega_c \alpha - k_{F_2} (\omega - \omega_s)) \exp(-k_{F_2} L/2)$$

$$- A_3^- (\omega_c \alpha - k_{F_1} (\omega - \omega_s)) \exp(-k_{F_1} L/2)$$

Où l'on a posé  $\omega_c = 2\Omega$  et  $\omega_s = SL\alpha/2$ . On trouve alors une solution non triviale au système linéaire précédent en annulant le déterminant correspondant. On obtient ainsi après un peu

d'algèbre :

$$\begin{aligned} & \left( \omega_s^2 - \omega^2 \right) \left( s^2 \exp(k_{F_2} L) - d^2 \exp(-k_{F_2} L) \right) \\ & - 2\delta \alpha \omega_c \omega_s \left( s \exp(k_{F_2} L) - d \exp(-k_{F_2} L) \right) \\ & + 2\omega_c^2 \alpha^2 \delta^2 \sinh(k_{F_2} L) = 0 \end{aligned} \quad (93.365)$$

avec  $d = k_{F_1} \rho_2 - k_{F_2} \rho_1$  ;  $s = k_{F_1} \rho_2 + k_{F_2} \rho_1$  et  $\delta = \rho_1 - \rho_2$ . De plus, il faut appliquer les conditions sur les profils d'équilibre hydrostatiques (Eqns. 62.228 et 62.229). Par simplicité, je supposerai des profils isothermes, ce qui permet d'écrire la fréquence de Brunt-Väisälä sous la forme :

$$N_i^2 = \frac{(\gamma - 1) g^2 \rho_i}{\gamma P_i}. \quad (93.366)$$

Ainsi, en utilisant les conditions aux limites (62.228)-(62.229) sur les vecteurs d'onde de Froude, on obtient finalement :

$$k_{F_1} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} k_{F_2} \quad (93.367)$$

On peut alors simplifier la relation de dispersion (93.365) en utilisant un seul paramètre  $r = (\rho_2 / \rho_1)^{3/2}$ , reflétant les caractéristiques différentes des milieux (1) et (2) :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_s^2 \\ &- \frac{2(1 - r^{2/3})}{k_{F_2} G} \alpha \omega_c \omega_s (r \sinh(k_{F_2} L) + \cosh(k_{F_2} L)) \\ &+ \frac{\omega_c^2 \alpha^2 (1 - r^{2/3})^2}{k_{F_2}^2 G} \sinh(k_{F_2} L) \end{aligned} \quad (93.368)$$

ANNEXE  
**D**

---

# Publications

**Plan du chapitre**

1. Subcritical hydrodynamic turbulence .....	195
2. Dimensionless numbers & MRI-Induced turbulent transport.....	217

## **1. On the relevance of subcritical hydrodynamic turbulence to accretion disk transport**



A&A 444, 25–44 (2005)  
 DOI: 10.1051/0004-6361:20053683  
 © ESO 2005

**Astronomy  
&  
Astrophysics**

## On the relevance of subcritical hydrodynamic turbulence to accretion disk transport

G. Lesur and P.-Y. Longaretti

Laboratoire d'Astrophysique, Observatoire de Grenoble, BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France  
 e-mail: [geoffroy.lesur;pierre-yves.longaretti]@obs.ujf-grenoble.fr

Received 22 June 2005 / Accepted 13 September 2005

### ABSTRACT

Hydrodynamic unstratified Keplerian flows are known to be linearly stable at all Reynolds numbers, but may nevertheless become turbulent through nonlinear mechanisms. However, in the last ten years, conflicting points of view have appeared on this issue. We have revisited the problem through numerical simulations in the shearing sheet limit. It turns out that the effect of the Coriolis force in stabilizing the flow depends on whether the flow is cyclonic (cooperating shear and rotation vorticities) or anticyclonic (competing shear and rotation vorticities); Keplerian flows are anticyclonic. We have obtained the following results:

- i/ The Coriolis force does not quench turbulence in subcritical flows; however, turbulence is more efficient, and much more easily found, in cyclonic flows than in anticyclonic ones.
- ii/ The Reynolds number/rotation/resolution relation has been quantified in this problem. In particular we find that the resolution demand, when moving away from the marginal stability boundary, is much more severe for anticyclonic flows than for cyclonic ones. Presently available computer resources do not allow numerical codes to reach the Keplerian regime.
- iii/ The efficiency of turbulent transport is directly correlated to the Reynolds number of transition to turbulence  $Rg$ , in such a way that the Shakura-Sunyaev parameter  $\alpha \sim 1/Rg$ . This correlation is nearly independent of the flow cyclonicity. The correlation is expected on the basis of generic physical arguments.
- iv/ Even the most optimistic extrapolations of our numerical data show that subcritical turbulent transport would be too inefficient in Keplerian flows by several orders of magnitude for astrophysical purposes. Vertical boundary conditions may play a role in this issue although no significant effect was found in our preliminary tests.
- v/ Our results suggest that the data obtained for Keplerian-like flows in a Taylor-Couette settings are largely affected by secondary flows, such as Ekman circulation.

**Key words.** accretion, accretion disks – hydrodynamics – instabilities – turbulence

### 1. Introduction

The question of the existence and physical origin of turbulence in accretion disks has been lively debated for a number of decades. Generally speaking, there are a priori two basic ways in which an accretion disk can become turbulent. In the first way, some linear instability is present in the flow, and its non-linear development eventually drives turbulence. In the second one, the flow is linearly stable, and undergoes a direct laminar-turbulent transition once a certain threshold in Reynolds number is reached. The first type of transition to turbulence is called supercritical, and the second, (globally) subcritical.

Global instabilities (such as the Papaloizou & Pringle 1984 instability) seem unpromising to drive turbulence (Blaes 1987; Hawley 1991). As for local instabilities, an astrophysically important example of supercritical transition is provided by the magneto-rotational instability (MRI) which has been

extensively studied following the pioneering work of Balbus, Hawley and their collaborators (Balbus & Hawley 1991; Hawley et al. 1995; see Balbus 2003, for a recent review). The turbulent transport induced by this instability is by now characterized in a number of instances, and has been called upon even when only some fraction of the disk is ionized, as in the midplane region of YSOs inner disks – the dead-zone (Gammie 1996; Fleming & Stone 2003). However, the reduced efficiency of the transport in this case, as well as the possible existence of disks which may not support MHD phenomena at all, has prompted some upsurge of interest in purely hydrodynamic instabilities. A local, baroclinic-like instability has been observed in global simulations by Klahr & Bodenheimer (2003). Local stability analyzes (Klahr 2004; Johnson & Gammie 2005a) find transient instability in this context, but shearing box simulations indicate that this does not drive turbulence (Johnson & Gammie 2005b). Urpin (2003) discusses an instability related

to vertical shear and heat transport of the Goldreich-Schubert type (Goldreich & Schubert 1967); however, this instability produces only a rather weak radial transport (Arlt & Urpin 2004). More recently, Dubrulle et al. (2005b) and Shalybkov & Ruediger (2005) have discussed an instability arising when both the fluid differential rotation and vertical stratification are stabilizing according to the Høiland criterion. However, it seems that this instability is connected to the presence of walls, and is dynamically important only when the inter-wall distance is small enough for a resonant-like interaction to take place<sup>1</sup> (Satomura 1981), otherwise disturbances are confined to the near boundary zone; a related result has recently been found in the astrophysics literature (Umurhan 2005). Earlier analytic and numerical investigations have shown this instability to be absent in local disk models (Goodman & Balbus 2001; Brandenburg & Dintrans 2001; Rüdiger et al. 2002). Note finally that vertical convection in a stratified disk can in principle also drive turbulence; however, it induces inwards transport instead of the required outwards one (Cabot 1996; Stone & Balbus 1996). Therefore, no local instability has yet been found in the hydrodynamic regime, which would explain the turbulent transport taking place in accretion disks.

Subcritical transition to turbulence is the subject of the present work. The non-rotating plane Couette flow provides a classical (and to date the best understood) example of a system undergoing a subcritical transition. Although the nature and mechanism of the transition remained elusive for decades, it has been identified in the recent years, in laboratory experiments (Daviaud et al. 1992; Dauchot & Daviaud 1995a,b; Bottin et al. 1997), numerical simulations (Hamilton et al. 1995; see also Schmiegél & Eckhardt 1997 and Eckhardt & Mersmann 1999), and theoretical analyzes (in particular Waleffe 1997; Waleffe 2003). Earlier investigations of the problem have focused on the role of nonlinear instabilities in subcritical shear flows, based on Landau-like toy-models on the one hand (e.g., Drazin & Reid 1981 and references therein), and analysis of the linear stability of finite amplitude defects in the flow profile on the other (Lerner & Knobloch 1988; Dubrulle & Zahn 1991; Dubrulle 1993); unfortunately, such analyzes yield little information on the existence and location of the turbulent state in parameter space and on the turbulent transport efficiency, unless further ad hoc assumptions are made.

In any case, on the basis of the empirically observed subcritical transition in laboratory flows, it was suggested that a similar process is relevant in accretion disks (Shakura et al. 1978), in spite of their very different prevailing physical conditions. This suggestion was tested and challenged in a series of numerical simulations performed by Balbus et al. (1996) and Hawley et al. (1999), in the shearing sheet limit. Transition to turbulence was not found in these simulations for Keplerian-like flows. The simulations were performed with two different finite difference codes (a PPM type code, and the ZEUS code), up to a resolution of  $256^3$ . These two works concluded that a stabilizing Coriolis force prevents the existence of turbulence

in the simulated flows, except in the immediate vicinity of the linear marginal stability limits.

This conclusion was in turn questioned by Richard & Zahn (1999), on the basis of the Taylor-Couette experiments performed by Wendt (1933) and Taylor (1936). These experimental results display a subcritical transition to turbulence in presence of a stabilizing Coriolis force. Also, new sets of experiments have been carried out in order to bring the experimental conditions closer to the ones prevailing in a Keplerian flow. Namely, a Taylor-Couette apparatus was used in conditions of radially decreasing angular velocity and radially increasing specific angular momentum. Turbulence was again found for high enough Reynolds numbers (Richard 2001; Richard et al. 2001) but the results are not unambiguous, as the potential role of secondary flows induced by the boundary conditions in the experiments, such as Ekman's circulation, is unclear, in spite of the attention devoted to this point in the experiments. In any case, a subcritical transition is also found in all experiments of shear flows on which a linearly stabilizing Coriolis force is superimposed (Longaretti & Dauchot 2005).

Longaretti (2002) has argued from a phenomenological analysis that the lack of turbulence in the simulations performed to date was due to a lack of resolution, as the Coriolis force may increase the range of scales that need to be resolved for a subcritical turbulent transition to show up. On the other hand, on the basis of a newly developed Reynolds stress closure scheme (Ogilvie 2003), Garaud & Ogilvie (2005) find that Keplerian flows may or may not be turbulent depending on the parameters of the scheme. For their favored choice of parameters, unbounded Keplerian flows are not turbulent, on the contrary to linearly stable, wall-bounded Taylor-Couette flows.

The recent astrophysical literature on the problem of subcritical transition has also focused on the concept of transient growth in Keplerian flows (Chagelishvili et al. 2003; Tevzadze et al. 2003; Yecko 2004; Umurhan & Regev 2004; Mukhopadhyay et al. 2005; Afshordi et al. 2005). Due to the nonnormal character of the Navier-Stokes equation, linear modes can transiently be strongly amplified in shear flows, although on the long run they must viscously decay. It has been argued that this transient growth can be relevant to astrophysical disks in two different ways. First, 3D turbulence (or an external forcing) can couple to large scale 2D structures; the (statistical) amplitude of these structures can be large, under the combined action of this coupling, of transient growth and of viscous decay, and these 2D structures may contribute to the overall transport in the disk (Ioannou & Kakouris 2001). Secondly, a large transient growth has been invoked in the bypass scenario of transition to turbulence, which involves an interplay between nonnormality and nonlinearity (see, e.g., Grossman 2000; Brosa & Grossmann 1999). Waleffe (1995) has emphasized the key role played by nonlinear interactions in the context of the recently identified turbulent self-sustaining process of non-rotating plane Couette flows (Hamilton et al. 1995; Waleffe 1997). Even though transient growth explains the strong modulations of the streamwise velocity from relatively weak streamwise rolls involved in this self-sustaining mechanism, the existence and properties of the turbulent basin of attraction for the full nonlinear dynamics are

<sup>1</sup> We thank Stéphane Le Dizes for bringing this point to our attention.

apparently poorly constrained by the nonnormal linear problem characteristics.

Our present understanding of the possible existence of a dynamically significant subcritical turbulent transition in accretion disks is unsatisfying in several respects, calling for a reinvestigation of the problem. On the one hand, the relevance of the available laboratory experiments to accretion disk turbulence is at best unclear, as will be shown in the course of the present work (for a different opinion, see Hersant et al. 2005). On the other hand, the absence of subcritical turbulence in the shearing sheet local model of accretion disks used by Balbus et al. (1996) and Hawley et al. (1999) may be an effect of various numerical limitations, namely, algorithm choice, limited resolution, nature of the boundary conditions, imposed aspect ratio and initial conditions of the simulations. Of these options, only the first two have been partially addressed in these previous investigations, leading to questions concerning the “effective Reynolds number” of the performed simulations – an ill-defined process-dependent concept, that we shall clarify in the context of the present problem. Following the suggestion of Longaretti (2002), the primary aim of the present work is to investigate in a more systematic way, through numerical simulations of plane parallel, rotating shear flows, the effects of finite resolution on the results. The effects of the other factors listed above are also somewhat explored, but to a lesser extent. Both cyclonic and anticyclonic rotation are considered; although cyclonic rotation is not relevant to accretion disks, it turns out that cyclonic flows behave very differently from anticyclonic ones, opening some interesting perspective into the nature of the problem.

This paper is organized as follows. Section 2.1 collects the background material relevant to the problem. First, the form of the equations solved is provided, and the global energy budget recalled, before discussing linear stability limits. The section is concluded by a summary of the effect of a stabilizing rotation in shear flows as characterized by the available laboratory experiments. The next section presents the various codes used in this work, and the numerical results obtained with them. Section 4 discusses various aspects of our numerical results, most notably the role of resolution and boundary conditions on the numerical side, the role of the Coriolis force, the underlying phenomenological picture, and the astrophysical implications, on the physical side. A summary is provided in Sect. 5, along with an outlook on the question of turbulence in accretion disks.

## 2. Rotating plane shear flows: a summary

The present investigation is concerned with the nonlinear instability of laminar flows characterized by a uniform shear, in the presence of a uniform global rotation. The direction of the flow is identified with the  $x$  axis (streamwise direction), and the direction of the shear with the  $y$  axis (shearwise direction); rotation is applied along the  $z$  axis (spanwise direction). The laminar flow  $\mathbf{u}_L$  is invariant in the streamwise and spanwise directions (in particular, the vertical stratification expected in a real disk is ignored):  $\mathbf{u}_L = U(y)\mathbf{e}_x$ .

Such a flow can be used to numerically model either a local portion of an accretion disk, or experiments on rotating plane

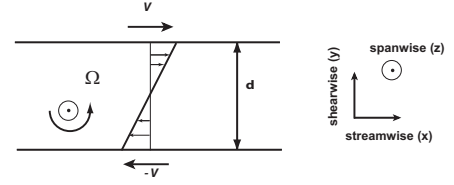


Fig. 1. Sketch of the configuration of rotating plane shear flows.

Couette flows, depending on the nature of the applied boundary condition in the shearwise direction (in practice, either rigid or shearing sheet; see next section). The configuration is represented in Fig. 1.

### 2.1. Equations of motion

The most useful form of the Navier-Stokes equation, for our present purpose, is obtained by separating the laminar flow  $\mathbf{u}_L$  and the deviation from laminar  $\mathbf{w}$  in the total velocity  $\mathbf{u}$  in the rotating frame, leading to

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = S \cdot y \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + (2\Omega + S)w_y \mathbf{e}_x - 2\Omega w_x \mathbf{e}_y - \frac{\nabla \delta \pi}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{w}, \quad (1)$$

where the gradient terms balancing the laminar flow Coriolis force has been subtracted out to form the effective generalized pressure  $\delta \pi$  (which therefore absorbs the equilibrium centrifugal, gravitational and/or pressure force term, depending on the considered equilibrium problem);  $\Omega$  is the flow rotation velocity in an inertial frame, and  $S = -dU/dy$  is the shear. The convention adopted here is that the sign of  $S$  is chosen to be positive when the flow is cyclonic, i.e., when the contributions of shear and rotation to the flow vorticity have the same sign. With our choice of axes, this implies that  $S = -2S_{xy}$ , where  $S_{ij} = 1/2(\partial_i u_{L,j} + \partial_j u_{L,i})$  is the usual deformation tensor. The system is closed either with the usual continuity equation supplemented by a polytropic equation of state, or, for simplicity, through an incompressibility assumption ( $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ ).

The relevant global time-scales of the problem are the shear time-scale  $t_s = |S|^{-1}$ , the viscous one  $t_v = d^2/\nu$  ( $d$  is the gap in the experiment, or the shearwise size of the shearing sheet box), and the rotation time-scale related to the Coriolis force  $t_\Omega = (2\Omega)^{-1}$ ; they relate to the advection term, the viscous term, and the Coriolis force term, respectively. Correlatively, the flow is described by two dimensionless numbers, the Reynolds number

$$\text{Re} = t_v/t_s = |S|d^2/\nu, \quad (2)$$

and the rotation number

$$R_\Omega = \text{sgn}(S)t_s/t_\Omega = 2\Omega/S. \quad (3)$$

For Keplerian flows,  $R_\Omega = -4/3$ . More generally, if one assumes that the large scale rotation of an astrophysical disk follows a power-law,  $\Omega(r) \propto r^{-q}$ , one locally has  $R_\Omega = -2/q$  in the disk.



Note that our Reynolds number is defined on the outer scales, and not on the turbulent ones, such as, e.g., the Taylor microscale. Large values ( $\sim 10^4$ ) of this number are involved in the problem investigated here; the correlative numerical requirements are discussed in Sect. 4.4.

## 2.2. Energy budget

As the global energy budget plays some role in the discussion of the results, it is rederived here. In the following equations, the bracket notation refers to a volume average of the bracketed quantity. The averaging volume is the simulation one, and shearing-sheet boundary conditions are assumed in the derivation, for definiteness. For the kinetic energy in the streamwise and shearwise directions, one finds:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{w_x^2}{2} \right\rangle = S (R_\Omega + 1) \langle w_x w_y \rangle - \left\langle \frac{w_y}{\rho} \frac{\partial \delta \pi}{\partial x} \right\rangle + \nu \langle w_x \Delta w_x \rangle, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{w_y^2}{2} \right\rangle = -S R_\Omega \langle w_x w_y \rangle - \left\langle \frac{w_x}{\rho} \frac{\partial \delta \pi}{\partial y} \right\rangle + \nu \langle w_y \Delta w_y \rangle. \quad (5)$$

Instead of the vertical equation, it is more instructive to write down the total kinetic energy equation:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{w^2}{2} \right\rangle = S \langle w_x w_y \rangle - \epsilon, \quad (6)$$

where

$$\epsilon = \nu \sum_i \langle (\nabla w_i)^2 \rangle \quad (7)$$

is the usual energy injection rate of turbulence cascade arguments<sup>2</sup>. In this last equation the incompressibility condition and the boundary conditions have been used in the reexpression of the pressure term, and an integration by part has been performed on the viscous term (a constant kinematic viscosity  $\nu$  is assumed).

In statistical steady-state, Eq. (6) reduces to,

$$S \langle w_x w_y \rangle = \epsilon. \quad (8)$$

As pointed out by Balbus et al. (1996), the fact that  $\epsilon > 0$  implies that in steady state, the shear rate and the Reynolds stress responsible for radial transport have identical signs. This result has a direct physical interpretation: the imposed shear prevents the flow to be in global thermodynamic equilibrium. Nevertheless, the flow tries to restore this global equilibrium by radially transporting momentum through the turbulent Reynolds stress from regions of larger momentum to regions of lower momentum, consistently with Eq. (8).

<sup>2</sup> Because the rate of energy transfer in scale is constant in a Kolmogorov-like argument, the injection rate is directly related to the small-scale dissipation rate.

Note finally that, in Eqs. (4) and (5), the pressure-velocity correlation terms *cannot* be neglected, as they are of the order of the cascade energy injection term  $\epsilon$ . This is almost unavoidable, as pressure is the only force that can provide for the acceleration of fluid particles in turbulent motions. As a matter of fact, the energy budget of any particular velocity component depends critically on the behavior of the velocity-pressure correlations, which are notoriously difficult to model (Speziale 1991). Ignoring this term in the analysis of the energetics therefore leads to dubious or erroneous conclusions.

## 2.3. Linear stability limits

Surprisingly enough, the question of the linear stability limits of the simple rotating shear flows considered here is not completely solved to date. Focusing for the time being on purely streamwise-independent perturbations, instability with respect to local perturbations follows when (Pedley 1969; Leblanc & Cambon 1997; Sipp & Jacquin 2000)

$$R_\Omega (R_\Omega + 1) < 0, \quad (9)$$

or, equivalently,  $-1 < R_\Omega < 0$ .

In plane Couette flows, it has been proven that  $R_\Omega^+ \equiv 0$  is the correct cyclonic marginal stability limit for non streamwise-invariant perturbations as well, at all Reynolds numbers (Romanov 1973). No such generic proof exists at the anticyclonic marginal stability limit ( $R_\Omega^- \equiv -1$ ). However, various linear and nonlinear numerical investigations suggest that this is indeed the case (Cambon et al. 1994; Komminaho et al. 1996; Bech & Andersson 1997). These results belong to plane Couette flows with rigid boundary conditions in the shearwise direction, but tend to prove that a local criterion captures the correct stability limit, as observed, e.g., in the simulations of Balbus et al. (1996) and Hawley et al. (1999).

The physics behind Eq. (9) can be captured by a displaced particle argument (Tritton & Davies 1981; Tritton 1992). This argument is reproduced in Appendix A for the reader's convenience. Note that Eq. (9) is identical to Rayleigh's specific angular momentum criterion for the centrifugal instability, as the usual epicyclic frequency reads  $\kappa^2 = S^2 R_\Omega (1 + R_\Omega)$ . However, in the plane shear flow limit of cylindrical flows, the concept of specific angular momentum used in the derivation of Rayleigh's criterion no longer has meaning, so that one must follow a different route, as done here. Note also that, consequently, the Rayleigh criterion for the centrifugal instability in the inertial frame can also be understood from the action of the Coriolis force in the rotating frame (a somewhat surprising, although not new conclusion), as the displaced particle argument of Appendix A is readily extended to cylindrical flows.

## 2.4. Subcritical transition in rotating plane Couette flows: a summary of relevant experimental results

In the laboratory, non-rotating plane Couette flows undergo a subcritical transition to turbulence at  $Re \simeq 1500$ . The transition Reynolds number steeply increases if a stabilizing rotation and/or a curvature is superimposed on the flow. The conceptually cleanest way to add rotation to a plane Couette flow is

to place a plane Couette apparatus on a rotating table. Also, by considering a Taylor-Couette apparatus with varying gap width and independently rotating cylinders, one obtains a flow in which both rotation and curvature effects can be studied, and which reduces to a rotating plane Couette flow in the narrow gap limit. For a more complete discussion of the distinction and characterization of rotation and curvature in Taylor-Couette experiments, and of the related experimental data, the reader is referred to Longaretti & Dauchot (2005).

For the range of parameters studied to date in the experiments, it turns out that rotation and curvature effects on the transition Reynolds number are superposed in an mostly additive way, so that both plane Couette flows and Taylor-Couette flows can in principle be used to characterize the effect of rotation. Concerning cyclonic flows, the only directly relevant data have been collected by Tillmark & Alfredsson (1996) with the help of a plane Couette flow apparatus placed on a rotating table. For anticyclonic flows, the only available experiments are those of Richard and coworkers (Richard 2001; Richard et al. 2001), who used a Taylor-Couette apparatus. The range of rotation number  $R_\Omega$  explored in these experiments is 0 to 0.1 for cyclonic rotation, and  $-1.6$  to  $-1$  for anticyclonic rotation. The data are shown in Fig. 2

The important point to note here is the steep dependence of the transition Reynolds number with the “distance” to marginal stability, with a typical slope  $|\Delta R_g|/|\Delta R_\Omega| \sim 10^4 - 10^5$ .

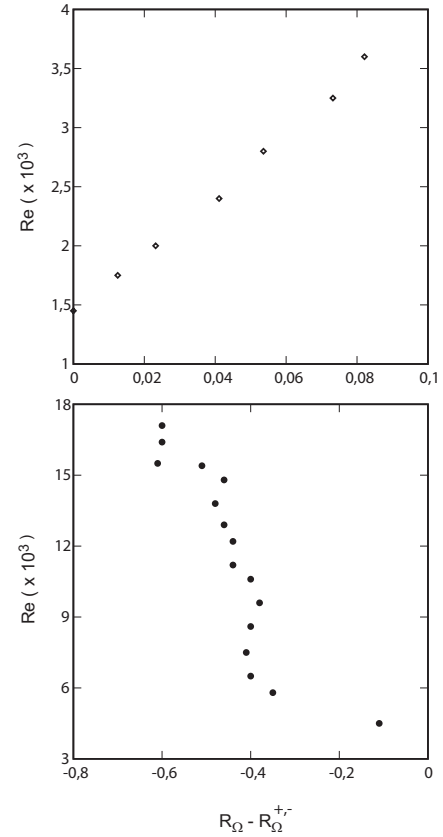
### 3. Numerical codes, strategy, and results

In the present work, we are concerned with rotating, unstratified uniform shear flows. Periodic boundary conditions hold in the direction of the flow ( $x$  axis) and the “vertical” direction ( $z$  axis), and either shearing sheet or rigid boundary conditions are applied in the direction of the shear ( $y$  direction). The vertical axis is also the axis of rotation of the flow. The shearing sheet boundary conditions are described in detail by Hawley et al. (1995). Shearing sheet flows thus modelled can be viewed as a local approximation of disk flows, while the use of mixed rigid-periodic boundary conditions is appropriate to numerically represent the rotating plane Couette flows of laboratory experiments, as routinely done in the fluid mechanics community.

#### 3.1. Numerical codes

Two different 3D codes have been written for the present work: a finite difference compressible code, similar to ZEUS (Stone & Norman 1992), but restricted to the Cartesian geometry, and rigid-periodic or shearing sheet boundary conditions; and a 3D incompressible Fourier code, in Cartesian geometry, and implementing only the shearing sheet boundary conditions. An explicit kinematic viscosity term is added in both codes, upon which the Reynolds number is defined. Both codes were parallelized using the Message Passing Interface.

The shearing sheet boundary conditions induce some changes with respect to a standard Fourier code. As a matter of fact, while we were developing this code, the work by Umurhan & Regev (2004) appeared, which implements the



**Fig. 2.** Data on the Reynolds number of subcritical transition to turbulence as a function of the rotation number  $R_\Omega$ , measured from the appropriate marginal stability limit  $R_\Omega^\pm$  (see text). *Top panel:* cyclonic plane Couette flow (data from Tillmark & Alfredsson 1996). *Bottom panel:* anticyclonic Taylor-Couette flow (data from Richard 2001). The anticyclonic data are more difficult to collect, and consequently noisier.

same technique. Therefore, our description of the required changes will be brief, and we refer the reader to this recent paper for details.

To get effective periodic boundary conditions on the 3 axes, one needs to write Eq. (1) in the sheared frame defined by:

$$t' = t \quad (10)$$

$$x' = x + S \cdot y \cdot t \quad (11)$$

$$y' = y \quad (12)$$

$$z' = z. \quad (13)$$

In this shearing frame, Eq. (1) (supplemented by the incompressibility condition) becomes:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t'} + \mathbf{w} \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{w} = -\frac{\tilde{\nabla} \delta \pi}{\rho} - 2\Omega w_x \mathbf{e}_y + (2\Omega + S) w_y \mathbf{e}_x + \nu \tilde{\Delta} \mathbf{w} \quad (14)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (15)$$

in which  $\tilde{\nabla} = \partial_{x'} \mathbf{e}_{x'} + (\partial_{y'} - S t' \partial_{x'}) \mathbf{e}_{y'} + \partial_{z'} \mathbf{e}_{z'}$  and  $\tilde{\Delta} = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla}$ .

Since the shearing box is a periodic box in the shearing frame, this last formulation of the Navier-Stokes equation can be written in 3D-Fourier Space. Defining:

$$\mu = k - S t k_x e_y, \quad (16)$$

one finally obtains:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{w}}{\partial t'} + i\mu \cdot \widehat{w \otimes w} &= -i\mu \frac{\widehat{\delta\pi}}{\rho} - 2\Omega \hat{w}_x e_y + (2\Omega + S) \hat{w}_y e_x \\ &\quad - \nu \mu^2 w \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mu \cdot \hat{w} = 0. \quad (18)$$

These are the equations actually used in our spectral code. The nonlinear term is computed using the 2/3 dealiasing rule with a pseudo-spectral method (see e.g. Peyret 2002 for a description of this point) and each time-step is evaluated using a 4th order Runge Kutta Scheme. One should note that a  $k$ -wave in the sheared frame actually appears as a  $\mu(t)$ -wave in the steady frame. Then, as time goes on in the simulation, the  $k$ -grid describes higher spatial frequency in the steady frame and consequently, the large scales are not computed anymore. Since nonlinear coupling limits the shearing of any wave-number, a remap procedure is periodically applied all along the simulation, and prevents to loose information on the large scale<sup>3</sup> (Rogallo 1981). This kind of algorithm has been extensively described by Umurhan & Regev (2004) using a 2D spectral code and the reader should refer to this publication for technical details on the remap procedure.

The choice of these two codes was made first for purposes of comparison with previous work, and secondly to allow us to cross-check the potential limitations of one code against the other; e.g., the shearing sheet boundary conditions and sheared spatial basis Eq. (16) have their own limitations, as the sheared basis forms a complete basis for shearing sheet boundary conditions, but only for these conditions.

The three codes were tested in a variety of ways. The first test was to reproduce the non-rotating plane Couette flow behavior computed by Hamilton et al. (1995). This was done both with our finite difference code, and with David Clarke's version of ZEUS3D, for comparison purposes. We checked the non-linear transition mechanism was well reproduced, with the corresponding Reynolds number and aspect ratio, and that the two codes gave completely consistent results. Then, the shearing sheet boundary conditions were tested using these two finite difference codes and the Fourier code. We have verified that mean turbulent quantities (e.g., mean energy, mean transport, velocity maxima and minima) and critical Reynolds number were statistically the same using the different codes, for different rotation numbers, either cyclonic or anticyclonic. This consistency holds over the  $10^5$ – $10^6$  time steps of our simulations.

### 3.2. Initial conditions and numerical strategy

The experimental results recalled in Sect. 2.4 suggest that a steep dependence of the transition Reynolds number with the rotation number may be the cause of the difficulty to find such

a transition in the previously published shearing sheet numerical simulations. Accordingly, one of the major aims of this investigation is to quantify the effect of the simulation resolution on the determination of the transition Reynolds number as a function of  $R_\Omega$ .

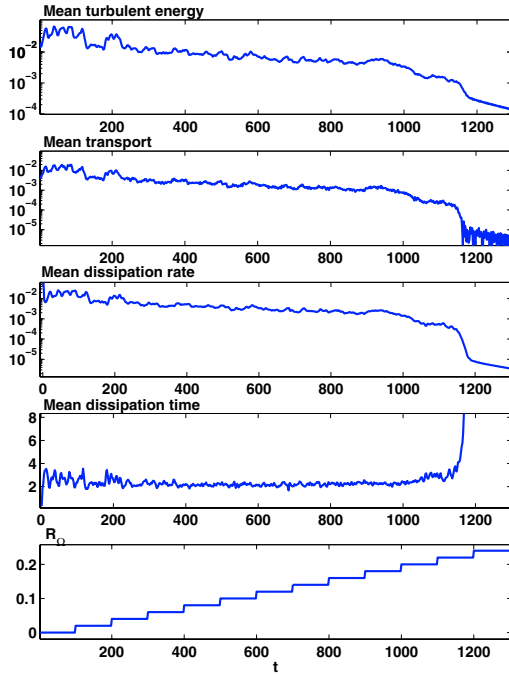
Now, one of the characteristic features of the subcritical transition to turbulence is an observed spread in transition Reynolds numbers, depending on the choice of initial conditions, and a correlative large spread in turbulence life-times. This has been documented both experimentally (Darbyshire & Mullin 1995) and numerically (Faisst & Eckhardt 2004) in pipe flows, and guides to some extent our choice of initial conditions and our numerical procedure. Indeed, turbulent life-times typically vary from fast decay (survival for less than one hundred dynamical times) to long or indefinite survival (several thousands of dynamical times, with a clear divergence at finite Reynolds number) over several orders of magnitude of variation of the initial condition amplitude, but for less than 50% of variations of Reynolds number (see Faisst & Eckhardt 2004, Figs. 2 and 7).

It is reasonable to assume that this qualitative behavior is generic. Consequently, we have chosen once and for all, fixed, high amplitude initial conditions, to make our numerical runs more directly comparable to one another upon variations of Reynolds numbers. Furthermore, we consider that turbulence is long-lived if it is not observed to decay for 100 or 200 shear times (depending on the runs). This choice is a compromise between computational time constraints, and accuracy in the determination of the transition Reynolds number of indefinitely self-sustained turbulence. In practice, simulations are performed in a cubic box (the impact of this choice is discussed in the next section, to some extent). The flow is adimensionalized with the only dimensional quantities introduced in the problem:  $S$  and  $d$ , where  $d$  is the simulation box size (or equivalently, by choosing  $|S| = 1$  and  $d = 1$ ). The initial conditions used for all our simulation are a random 3D excitation of the 10 largest Fourier modes, with rms fluctuations in velocity of order unity in our chosen units. Other shapes of initial conditions were tested such as white noise (all scales excited randomly) or introducing large scale vortices in various directions with a small superimposed noise. This produces no significant difference once the flow is relaxed ( $t \gtrsim 20 t_s$ ).

The numerical strategy adopted is then rather straightforward: choosing a code, a resolution, a boundary condition (for the finite difference code) and a Reynolds number, at fixed initial conditions, the flow evolution is computed starting from the marginal stability limit in rotation number  $R_\Omega$  and evolving the rotation number by (small) fixed steps every 100 or 200 shear times. According to the preceding discussion, this allows us to reduce at maximum the number of runs and the run time needed to observe systematic trends in the numerical results.

In this section, only shearing sheet boundary conditions are used. We have also checked that the time required to dissipate the turbulent energy of the flow assuming energy injection is stopped (deduced from the  $\epsilon$  term in Eq. (6)) is smaller than  $100 t_s$ ; this constraint is always satisfied by a large margin in all our runs, implying that the deviations from laminar motion that we observe are self-sustained (i.e., we do not

<sup>3</sup> We thank Achim Wirth for pointing out this reference to us.



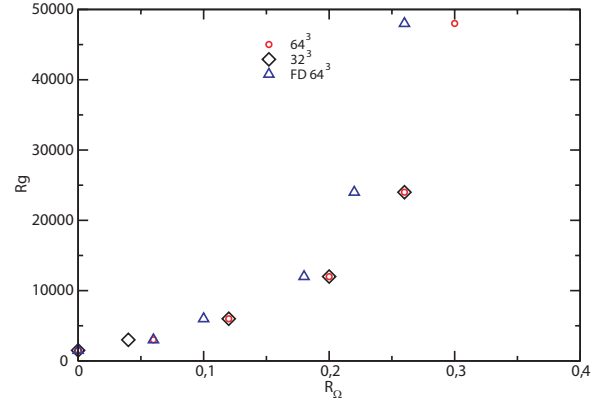
**Fig. 3.** Example of the time evolution of a  $64^3$  ( $\text{Re} = 12\,000$ ) cyclonic flow run as computed by our Fourier code. The turbulent energy, transport and dissipation rate are the quantities involved in Eq. (6). The dissipation time follows from the turbulent energy and the dissipation rate. The bottom panel displays the evolution of the rotation number that is imposed in the course of the simulation.

observe them because their dissipation time exceeds the run time). Actually, once turbulence is lost in our simulations, the energy in the velocity fluctuations always decreases rather fast, as can be checked in Fig. 3 for cyclonic flows. The same property is found for anticyclonic flows, see Sect. 3.4.

We conclude this section on our choice of the Mach number ( $\text{Ma} = dS/c_s$ ) for our simulations with the compressible Zeus-like code. The type of motions we are considering in these simulations reach at most a small fraction of the boundaries relative velocity (normalized to unity in this work). We found that a sound speed also normalized to unity was a good compromise between limiting the effects of compressibility (which eventually makes the turbulence compressible and largely different in character when the Mach number is too large), and the impact of the sound speed on the CFL condition. Also, this value mimics the real role of compressibility in a vertically stratified accretion disk. Consequently,  $\text{Ma} = 1$  is imposed in all our compressible simulations.

### 3.3. Numerical results: cyclonic flows

On the cyclonic side, simulations are performed while maintaining the rotation number  $R_\Omega$  constant during 100 shear times; then the rotation number is increased by steps of 0.02, starting from the marginal cyclonic point  $R_\Omega = 0$ . An example global output of such a simulation is plotted in Fig. 3



**Fig. 4.** Transition Reynolds number  $Rg$  as a function of the rotation number  $R_\Omega$ , with different resolutions and codes for shearing-sheet boundary conditions (cyclonic rotation). All points were obtained using our Fourier code except those labelled FD (finite difference) which use our ZEUS-like code.

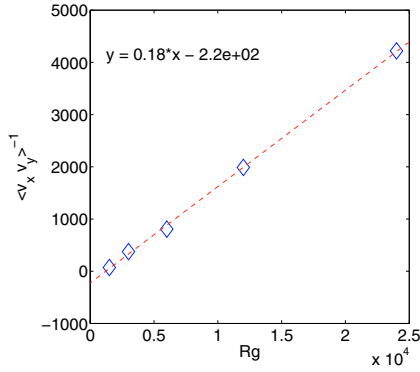
for  $\text{Re} = 12\,000$ . The relaminarization point is easily found since the transition between the turbulent to laminar state is quite abrupt (at  $t = 1150$  in Fig. 3). We define the last turbulent point as the last rotation rate for which turbulence is sustained for  $100 t_s$ . For our example simulation, we find that the last turbulent point at  $\text{Re} = 12\,000$  and  $64^3$  resolution with our Fourier code is  $R_\Omega = 0.2$ .

Using this kind of simulation, we plot the last turbulent points in the  $(\text{Re}, R_\Omega)$  space, for different resolutions and/or codes in Fig. 4. Turbulence is found on the cyclonic side at least up to  $R_\Omega = 0.3$ , i.e. significantly away from the marginal stability point.

Note that turbulence is maintained with certainty (with our adopted criteria) at any given point, but, due to the sampling made in the explored Reynolds number, turbulence may also be maintained at a somewhat lower Reynolds number (i.e. just below the last turbulent point in Fig. 3). This can be true down to the previously tested Reynolds number, for which turbulence is not maintained at the considered rotation rate. In conclusion, the real transition Reynolds  $Rg$  curve in the  $(R_\Omega, \text{Re})$  plane should be found somewhat below (but not far from) the last turbulent point curve determined here. This remark is more important for anticyclonic flows, for which precise quantitative results are needed.

Except for a systematic shift between the results obtained with the Fourier code and the ZEUS-like one, the results seem to be independent of the resolution. The numerically minded reader may ask how one can reach such high Reynolds numbers with such relatively small resolutions. This point is addressed in Sect. 4.4.

An important issue is to quantify transport in subcritical turbulent flows. The phenomenological arguments of Longaretti (2002) suggest that  $\langle v_x v_y \rangle \propto 1/Rg$  in subcritical flows, and that the turbulent transport in a given flow with specified  $(\text{Re}, R_\Omega)$



**Fig. 5.** Mean transport as a function of the transition Reynolds number for cyclonic rotation (normalized by  $S^2 d^2$ ).

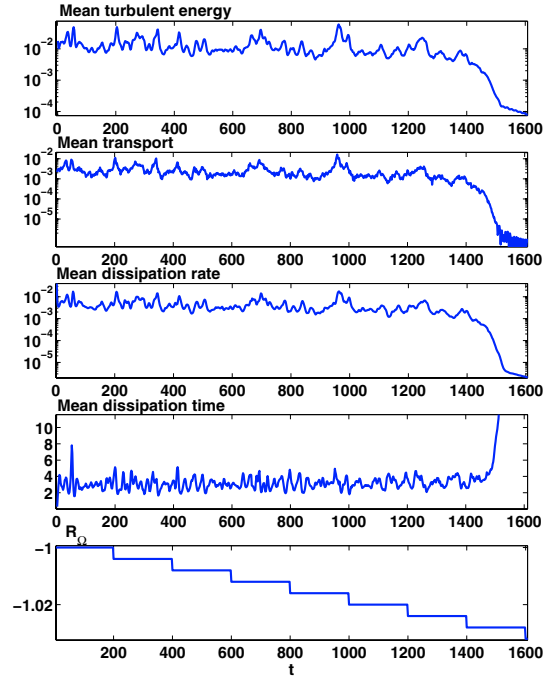
numbers depends only on  $R_\Omega$  through  $Rg$  (see Sect. 4.1)<sup>4</sup>. Consequently, we have used all our simulations at a given  $R_\Omega$  to obtain the least noisy evaluation of  $\langle v_x v_y \rangle$ . Then, with the help of Fig. 3, one finds a transition Reynolds number  $Rg$  for any given  $R_\Omega$ , which allows us to plot the mean turbulent transport  $\langle v_x v_y \rangle$  as a function of the transition Reynolds number in Fig. 5. This was done only from the data of our Fourier code for self-consistency, but using both the  $32^3$  and  $64^3$  resolution runs, as they produced the same results, and as the use of a larger data set improves the statistics. The resulting relation reads

$$\langle v_x v_y \rangle \simeq \frac{5.5}{Rg - 1250} (Sd)^2. \quad (19)$$

The presence of an additive constant in the denominator of this expression is a clear indication of the influence of the linear instability close to the marginal stability limit; indeed, transport in the supercritical region is significantly enhanced with respect to the subcritical region (see, e.g., Fig. 16 in Dubrulle et al. 2005a, and explanations therein). For large critical Reynolds number (i.e., far enough from the marginal stability boundary, e.g.,  $Rg \gtrsim 15\,000$ ),  $\langle v_x v_y \rangle \simeq 5.5/Rg$  is a good approximation.

### 3.4. Numerical results: anticyclonic flows

The strategy adopted in simulations of anticyclonic flows is similar to the cyclonic side. Starting at  $R_\Omega = -1.0$ , the rotation number is decreased in steps of 0.004 and each step lasts 200 shear times to allow for flow relaxation. A typical run is shown in Fig. 6, computed with our 3D Fourier Code at  $Re = 12\,000$ . One should note that the flow fluctuations have higher amplitudes on the anticyclonic side than on the cyclonic side; this is why we have reduced the rotation number steps and increased the relaxation time in anticyclonic runs. Consistently, The last turbulent point is defined here as the last rotation rate for which turbulence is sustained for  $200t_s$ . On the



**Fig. 6.** Time evolution of a  $64^3$   $Re = 12\,000$  anticyclonic flow as computed by our Fourier code. Panel description is identical to Fig. 3.

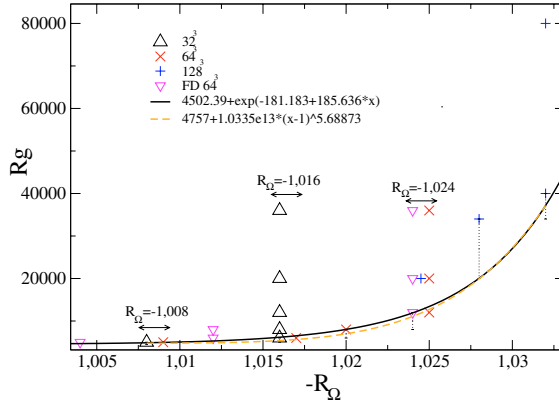
example Fig. 6, we find the last turbulent point for  $Re = 12\,000$  at  $R_\Omega = -1.024$ .

As for cyclonic rotation, the last turbulent points for anticyclonic rotation are plotted in Fig. 7 and the mean transport in Fig. 8. Error bars are added in Fig. 7 to help assessing the significance of the various fits performed, as they will be used later on. On the lower bound of these bars, turbulence is not maintained with certainty whereas the contrary is true for *at least* 200 shear times at the upper bound. Therefore, the actual transition Reynolds number is bracketed by the error bar.

Recalling that  $R_\Omega = -2/q$  with  $\Omega(r) \propto r^{-q}$  and that  $R_\Omega = -1$  corresponds to a constant specific angular momentum distribution in cylindrical flows, the largest rotation number reached here ( $R_\Omega = -1.032$ ) corresponds to  $q = 1.94$ ; this is quite consistent with the results shown in Fig. 1 of Hawley et al. (1999), except for the crucial fact that the resolution and Reynolds number dependence are now quantified. The reason why such high Reynolds numbers are accessible with our relatively low resolutions is discussed in Sect. 4.4. For the time being, let us comment a bit further on the information encoded in Fig. 7, which shows that Reynolds number and resolution are different, albeit related control parameters. We will focus on the Fourier code data for definiteness. Consider the  $32^3$  data, for example. For  $|R_\Omega| < 1.016$ , the transition Reynolds number agrees with the one found at higher resolution. However, increasing the Reynolds number above  $\sim 6000$  produces a loss of turbulence at the same rotation number independently of the Reynolds number, whereas this is not true at higher resolutions. This implies that the physics is not faithfully represented at this resolution for  $Re > 6000$  and  $R_\Omega > 1.016$ .

<sup>4</sup> The same result follows if one assumes that in the fully turbulent state, the torque  $\propto Re^2$ , as predicted in Kolmogorov turbulence, and observed in experiments (see, e.g., Dubrulle et al. 2005a). The argument of Sect. 4.1 allows us to recover this result from more generic physical principles.





**Fig. 7.** Transition Reynolds number  $Rg$  as a function of the Rotation number  $R_\Omega$ , and related analytical fits, with different resolutions and codes for shearing-sheet boundary conditions (anticyclonic side). All plots were computed using our Fourier code except FD (finite difference) which uses our ZEUS-like code. Note that the  $x$ -axis is inverted with respect to Fig. 2. Symbols along the fitted lines correspond to resolved simulations; vertically aligned symbols indicate the limiting rotation number that can be reached at a given resolution and mostly correspond to unresolved simulations. For the sake of clarity, symbols which sit on top of each other have been slightly displaced along the  $R_\Omega$  axis; this is indicated by the arrows and the related values of  $R_\Omega$ .

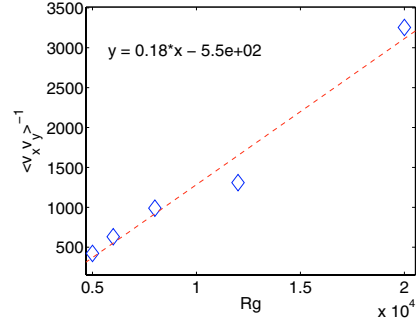
This is the most important point to note here: two different regimes of transition from turbulent to laminar are displayed in this figure. The first (corresponding to the various fitting curves) is the correct, resolution independent and Reynolds dependent transition. The second (apparent as the various vertically aligned points at a given resolution) is an incorrect, Reynolds independent and resolution limited transition. Note that the points belonging to both this vertical line and the laminar-turbulent line are still resolved, though, as shown in Sect. 4.4.2. The meaning of the behavior displayed in Fig. 7 is further discussed in Sect. 4.1, and its implications in Sects. 4.2 and 4.4.

Comparing Figs. 4 and 7, we remark that the dependence of the transition Reynolds number  $Rg$  on the “distance” to marginal stability in rotation number  $|R_\Omega - R_\Omega^\pm|$  is considerably stiffer on the anticyclonic side than on the cyclonic one. This has important implications that will be discussed in the next section. Conversely, the turbulent momentum transport is very similar to the one found for the cyclonic side<sup>5</sup>, as shown in Fig. 8

$$\langle v_x v_y \rangle \simeq \frac{5.5}{Rg - 3000} (Sd)^2. \quad (20)$$

The constant in the denominator differs from the one found on the cyclonic side. This reflects the difference of transition Reynolds number at the two marginal stability limits. For large enough Reynolds number, one find  $\langle v_x v_y \rangle \simeq 5.5/Rg$ , which

<sup>5</sup> Figure 8 is noisier than its cyclonic counterpart. This is a consequence of the larger turbulent fluctuations observed in anticyclonic flows. Longer integrations time-scale would have been required to improve the statistics.



**Fig. 8.** Mean transport as a function of critical Reynolds number on the anticyclonic side (normalized by  $S^2 d^2$ ).

corresponds to the asymptotic relation found on the cyclonic side (see Sect. 4.1 for a discussion of the possible origin of this behavior). This indicates that this relation is very robust for subcritical flows, far enough from the supercritical transition limit.

#### 4. Discussion

Our results are at variance with both the point of view advocated by Balbus et al. (1996) and Hawley et al. (1999) (absence of subcritical turbulence), and Richard & Zahn (1999) and Hersant et al. (2005) (efficient transport due to subcritical turbulence). This is further investigated in this section. We shall first present some phenomenological background material which helps to understand the physical origin and meaning of the results presented in the previous section. Then, we shall respectively discuss the implications of our results for Keplerian flows (Sect. 4.2), the stabilizing role of the Coriolis force in subcritical flows (Sect. 4.3), and the relation between Reynolds number and resolution (Sect. 4.4); these last two items have been highly controversial in the past decade. Section 4.4 also discusses the relation of these results with the scale-invariance argument of Balbus (2004). Finally the influence of the nature of the adopted boundary conditions and aspect ratio on our results is the object of Sect. 4.5, as well as their relation to fluid dynamics experiments. Note also that the discussion of the boundary conditions helps quantifying possible biases introduced by the sheering sheet boundary conditions with respect to actual disk physics. The reader interested only in the astrophysical implications of our results may focus in Sect. 4.2.

##### 4.1. Some aspects of subcritical turbulence phenomenology

The phenomenology of subcritical turbulence has been discussed in Longaretti (2002) and Longaretti & Dauchot (2005). Some directly relevant aspects for our present purpose are presented here (and clarified where needed).

Turbulent transport is often quantified in terms of a turbulent viscosity. As this description has been criticized in the past, a brief discussion of its use here might be useful. First, note that, in scale-free systems such as the ones studied here (the

only scale present being the simulation box size), one can always assume that

$$\langle v_x v_y \rangle = \nu_t S, \quad (21)$$

as this only amounts to defining a turbulent viscosity  $\nu_t$  such that this relation is satisfied. In any case, as the source of turbulence is the shear, the Reynolds stress  $\langle v_x v_y \rangle$  must be some function of the shear  $S$ , which cancels when the shear cancels.

Now,  $\nu_t$  has the dimension of a length times a velocity, so that one must therefore have, in our simulations,

$$\nu_t = \alpha S d^2, \quad (22)$$

as  $Sd$  and  $d$  are the only dimensional quantities with the right dimensionality introduced in the problem.

$\alpha$  is a Shakura-Sunyaev-like parameter. It is a dimensionless quantity, and can therefore only depend on the dimensionless quantities<sup>6</sup> characterizing the problem at hand, namely the Reynolds number  $Re$  and the rotation number  $R_\Omega$  (i.e., the shear dependence of  $\alpha$  can only appear through the ratios of the shear time scale to the viscous and the rotation time scales):

$$\alpha \equiv \alpha(Re, R_\Omega). \quad (23)$$

The results of Sect. 3 suggest that, quite remarkably,  $\alpha$  depends only on  $R_\Omega$  through the transition Reynolds  $Rg$ , and not (or little) on  $Re$ , in subcritical flows. The origin of this behavior can be understood in the following way (Longaretti 2002).

A sheared flow is out of global thermodynamical equilibrium, and tries to restore this equilibrium by transporting momentum across the shear. A subcritical flow has only two means at its disposal to achieve this purpose: laminar and turbulent transport. It will tend to choose the most efficient one under any given set of conditions<sup>7</sup>, i.e. at given  $Re$  and  $R_\Omega$ . The subcritical turbulent transport will exceed the laminar one when  $\nu_t \gtrsim \nu$ . Right at the laminar-turbulent threshold,  $Re \sim Rg$  and  $\nu_t \sim \nu$ . This implies that

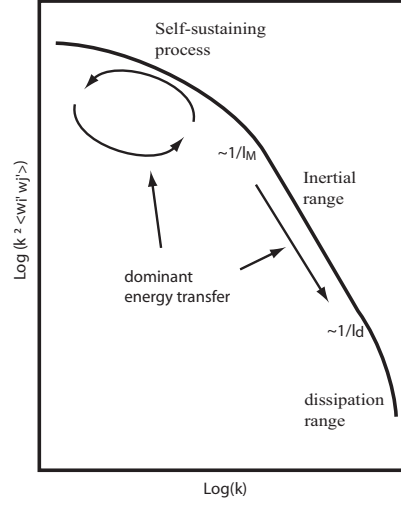
$$\alpha \sim \frac{\nu}{S d^2} \sim \frac{1}{Rg}. \quad (24)$$

Now, what does happen at Reynolds numbers  $Re$  larger than the transition Reynolds number  $Rg$ ? To answer this question, it is useful to have in mind some idealized, qualitative picture of the situation in wave-number space. Such a picture is proposed in Fig. 9, and constitutes a reasonable working hypothesis. It is reasonably well-supported by our current knowledge of the plane Couette flow turbulent self-sustaining process and of inertial spectra, as well as by the spectral analysis of some of our simulations presented and discussed in Sect. 4.4.2.

In this picture, the large scales are occupied by the self-sustaining mechanism. All scales in this domain are expected to be coherent in phase, and interactions between large and small

<sup>6</sup> Actually, in principle,  $\alpha$  depends also on the aspect ratio of the simulation, and on the nature of the boundary conditions. As these are not varied in the results discussed on the basis of the phenomenology described here, this dependency is ignored for simplicity.

<sup>7</sup> Note that this does not imply that the momentum transport is absolutely maximized.



**Fig. 9.** Proposed sketch of the idealized energy spectrum in a turbulent shear flow. Arrows indicate the energy flow through mode coupling. The length-scales  $l_M$  and  $l_d$  correspond to the top of the inertial range (assumed identical to the bottom of the self-sustaining range for simplicity) and the top of the dissipation range. Scales are assumed to be normalized to the box simulation size  $d$ , and anisotropy is ignored in this sketch (see text for details).

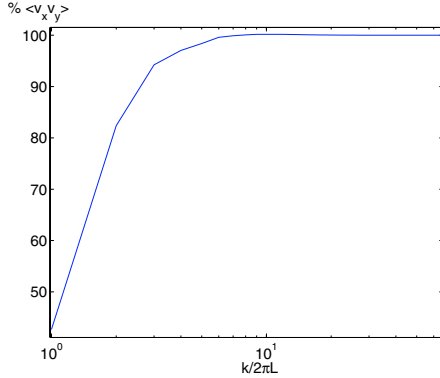
scales occur both ways<sup>8</sup>. The intermediate range is the inertial range of turbulence; scales have no phase coherence, energy cascades to smaller scales at a constant rate, provided by the self-sustaining mechanism (as part of the mode coupling taking place in the self-sustaining mechanism range of scales occurs with the inertial range). The smallest range represents the viscous dissipation scales. The existence of the self-sustaining process scales, their properties, and their influence on the inertial range (energy input and anisotropy) is the distinctive feature of shear turbulence with respect to the more commonly known and studied forced isotropic turbulence.

In such a picture, increasing the Reynolds number almost exclusively results in an increase of the inertial range, which is essentially vanishing at the transition Reynolds number. This should have little effect on the turbulent transport (whereas, on the contrary, the laminar transport becomes smaller and smaller when increasing the Reynolds number).

Indeed, we have first checked that this is case in non-rotating Couette plane flows, where the self-sustaining mechanism is identified (Hamilton et al. 1995): the transport is almost completely determined dominated by the mechanism rolls and streaks. Furthermore, in our simulations, we have computed the contribution of each length scale to the total transport  $\langle v_x v_y \rangle$ . First one should note that in Fourier space (in 1D for simplicity):

$$\langle v_x v_y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{v}_x(k_n) \tilde{v}_y^*(k_n). \quad (25)$$

<sup>8</sup> This is the case in particular for the non-rotating plane Couette self-sustaining mechanism (Waleffe 1997).



**Fig. 10.** Example of the cumulative sum contribution of each scale length to the mean transport, starting from  $k_x = 0$  in the  $x$  direction: 99% of the transport comes from  $k_x < 10$  scales. From a  $128^3$  simulation,  $\text{Re} = 20\,000$ ,  $R_\Omega = -1.020$ .

Therefore, the contribution to mean transport of the wavelength  $k_n$  is found to be  $2\Re(\tilde{v}_x(k_n)\tilde{v}_y^*(k_n))$ , since  $k_n$  and  $k_{N-n}$  represents the same physical wavenumber. This simple result can be used in 3D by averaging the transport over 2 directions (in physical space) and by computing the Fourier transform in the remaining direction; this procedure is sufficient for our purpose here. The resulting cumulative Fourier sum, starting from  $n = 0$  is illustrated on an example in Fig. 10 to quantify which scales dominate the transport. In this example, the resulting spectral analysis is plotted in the  $x$  direction for a  $128^3$  anticyclonic flow with  $R_\Omega = -1.024$  and  $\text{Re} = 20\,000$ , showing that more than 99% of the transport comes from scales larger than  $1/10$  of the box size; this range corresponds to the length-scales of the self-sustaining process (see Sect. 4.4.2). Similar results are found for spectral analyzes in the  $y$  and  $z$  directions, consistently with the picture discussed here. This is expected anyway if the inertial spectrum is Kolmogorovian, as confirmed from the spectral analysis of Sect. 4.4.2<sup>9</sup>.

There are two loose ends in this discussion. First, hysteresis is usually experimentally observed in subcritical transitions to turbulence: the measured transition Reynolds number is higher when moving “up” from the laminar to turbulent states than when moving “down” from the turbulent to laminar ones. This suggests that the laminar-turbulent boundary is separated by some sort of barrier in the appropriate phase-space (defined, e.g., by the amplitudes and phases of the Fourier modes). This (along with the fact that the arguments developed here apply only in order of magnitude) may well explain the existence of the constant of order 5 that one finds in Eqs. (19) and (20) with respect to Eq. (24). Secondly, the arguments presented here ignore the existence of marginal stability thresholds. This, as pointed out in Sects. 3.3 and 3.4, may explain the presence of the constant at the denominator of these relations, as the equivalent global subcritical transition Reynolds number that one

can define in the supercritical regime is orders of magnitude smaller than in the subcritical regime.

To conclude, let us point out the relation of this picture with the numerical results presented in Fig. 7. The fact that higher resolutions are required to faithfully represent the physics at higher rotation numbers indicates that the ratio  $d/l_M$  increases with rotation number. Indeed, if the resolution is too low, so that the relative scale  $l_M/d$  is not resolved, the energy transfer loop represented in Fig. 9 cannot take place, and turbulence is not self-sustained. Furthermore, at the transition Reynolds number, the inertial spectrum is nearly inexistent, as pointed out above, and  $l_M \sim l_d$ . Consequently, the most critical scale ratio in this problem is expected not to be the Kolmogorov one, but the self-sustaining mechanism one ( $d/l_M$ ).

#### 4.2. Implications for Keplerian flows

Actual disks are vertically stratified, whereas stratification is ignored in our experiments. Stratification provides us with a local macroscopic scale (the disk scale height  $H$ ). With appropriate provisos relating to the possible stabilizing or destabilizing role of stratification<sup>10</sup>, one can tentatively identify this scale height with our simulation box size:  $H = d$ . This assumption is made throughout this section. In the same way, the Shakura-Sunyaev  $\alpha_{SS}$  parameter is defined such that  $v_t = \alpha_{SS} c_s H \simeq \alpha_{SS} \Omega H^2$ . Equation (22) then implies that  $\alpha_{SS} = 2\alpha/|R_\Omega| \simeq \alpha$  (the last equality holds within a factor of order unity for the rotation number range of interest in this work).

Using the numerical results shown in Figs. 7 and 8, one can deduce a few properties of Keplerian flow subcritical shear turbulence, based on various conservative extrapolations of our numerical data. First, the transition Reynolds number  $Rg$  dependence on the rotation number  $R_\Omega$  is well-fitted by a power or an exponential law. Using these laws, one can get a first set of estimates of the transition Reynolds number for Keplerian-like flows ( $R_\Omega = -4/3$ ):  $Rg = 1.1 \times 10^{10}$  and  $Rg = 1.3 \times 10^{26}$ , respectively. The last estimate leads to the absence of subcritical turbulence in accretion disks whereas the first one allows for its existence<sup>11</sup>. Secondly, let us note that, for both cyclonicity, the Coriolis force induces a steeper and steeper increase of the transition Reynolds number when moving away from the marginal stability boundary. This suggests that one can find a lower bound for  $Rg$  by linearly extrapolating the power law fit beyond the last known point ( $R_\Omega = -1.032$ ). One find this

<sup>9</sup> The true nature of the inertial spectrum might be affected by the anisotropy generated by the shear and the Coriolis force, but these anisotropies must become negligible at small scale, due to the shorter and shorter eddy turnover time.

<sup>10</sup> If stratification is destabilizing, the momentum transport induced by the resulting convective motions is in the wrong direction, as recalled in the introduction, and must be counterbalanced by another process; ignoring stratification in this case therefore makes life easier for this other process (here, subcritical turbulence). If stratification is stabilizing, this also most likely results in an increased difficulty in finding the transition to turbulence, and a related increase in the transition Reynolds number. These arguments suggest that ignoring the dynamical stratification altogether maximizes the overall outwards transport in our problem.

<sup>11</sup> We assume that accretion disk Reynolds numbers lie between  $10^{10}$  and  $10^{15}$  for definiteness. The Reynolds number definition used in this evaluation is  $\text{Re} = SH^2/\nu$  where  $H$  is the local disk scale height, consistently with the  $H = d$  identification made earlier.



**Table 1.** Extrapolated transition Reynolds numbers, values of  $\alpha$ , and required simulations resolution, for Keplerian flows, under various assumptions (see text for details).

	exponential	power-law	cyclonic	linear
$Rg$	$1.3 \times 10^{26}$	$1.1 \times 10^8$	$2 \times 10^7$	$1.8 \times 10^6$
$\alpha$	n/a	$5 \times 10^{-10}$	$2.6 \times 10^{-7}$	$3.1 \times 10^{-6}$
$(d/\delta)^3$	n/a	$7000^3$	$3000^3$	$900^3$

way  $Rg^{\min} = 1.8 \times 10^6$ . As a final hypothesis, one may envision that the  $Rg(R_\Omega)$  relation would be more or less symmetric with respect to  $R_\Omega = 0$  if there were no supercritical domain. This would explain why the actual relation of Fig. 7 is so steep: in this picture, the system tries to reach back as fast as possible the high values of transition Reynolds number expected from this hypothetical symmetry, after which the Reynolds dependence with rotation number would be much less steep. Under this assumption the expected transition Reynolds number for Keplerian flows would be  $Rg = 2. \times 10^7$  (a power-law fit of the cyclonic data has been used in this extrapolation).

This information is summarized in Table 1, along with the corresponding values of  $\alpha$ , obtained from the asymptotic relation  $\alpha = \langle v_x v_y \rangle = 5.5/Rg$  found for cyclonic and anticyclonic flows in the previous section. The last line shows the resolution required to successfully simulate Keplerian flow turbulence, for the various Reynolds numbers (see Sect. 4.4.1). One sees that even the most optimistic  $\alpha$  bound ( $\alpha_{\max} = 3.1 \times 10^{-6}$ ), obtained with the linear extrapolation, is substantially smaller than the values required in astrophysical accretion disks (as summarized, e.g., in Papaloizou & Lin 1995). Note finally that, even without any extrapolation, our results exclude subcritical turbulent transport at the  $\alpha \approx 3 \times 10^{-4}$  level.

#### 4.3. Role of the Coriolis force in uniform shear flows

Two different but related issues have been raised in the literature concerning the role of the Coriolis force in subcritical systems.

First, for linearly stable flows, Balbus et al. (1996) point out that the Coriolis force plays a conflicting role in Eqs. (4) and (5). More precisely, they make the following point: as  $S \langle v_x v_y \rangle > 0$  for turbulence to exist (see Sect. 2.2), the terms in which the shear  $S$  has been factored out in these equations have opposite signs for linearly stable flows, while they have the same sign for linearly unstable flows (note that this is true independently of the flow cyclonicity). They conclude from this that a stabilizing rotation prevents turbulence to show up in subcritical shear flows, except possibly in the vicinity of marginal stability. Somewhat relatedly, the recent Reynolds stress-closure model of Ogilvie (2003) and Garaud & Ogilvie (2005) predicts relaminarization for large enough deviations from the marginal stability limit. In particular, for the authors' standard choice of parameters, it predicts relaminarization for  $R_\Omega \sim 0.2$  for cyclonic rotation. However, as can be seen in Fig. 4, both the Balbus et al. (1996) argument and the Garaud & Ogilvie (2005) result conflict with our simulations: subcritical turbulence is

maintained away from marginal stability on the cyclonic side, at least up to  $R_\Omega \approx 0.3$ . Note that we could have pushed the search for transition to turbulence beyond what is shown on this graph, especially by using higher resolutions, but did not do it due to computer resources limitations. As discussed in the next subsection, the absence of turbulence in the Keplerian flow simulations of Balbus et al. (1996) and Hawley et al. (1999) is a problem of resolution.

The second issue relates to the asymmetry between cyclonic and anticyclonic rotation. The stress-closure model just mentioned depends on the rotation number only through the combination  $R_\Omega(R_\Omega + 1)$  which implies a symmetry with respect to  $R_\Omega = -1/2$ . This symmetry is clearly violated by our numerical results (compare Figs. 4 and 7), a point which requires some comments.

First, note that the linearized Navier-Stokes Eq. (1) exhibits this symmetry for perturbations with vanishing pressure variation ( $\delta\pi = 0$ ). In this case, the linearized equation can be written:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = S \cdot y \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + S \cdot \left( (R_\Omega + 1) w_y \mathbf{e}_x - R_\Omega w_x \mathbf{e}_y \right) + \nu \Delta \mathbf{w}. \quad (26)$$

The cyclonic-anticyclonic symmetry appears when exchanging the  $x$  and  $y$  directions. Indeed, upon the following change of variables:

$$\begin{aligned} R'_\Omega &= -R_\Omega - 1, \\ w'_x &= w_y, & \mathbf{e}'_x &= \mathbf{e}_y, \\ w'_y &= w_x, & \mathbf{e}'_y &= \mathbf{e}_x, \\ w'_z &= w_z, & \mathbf{e}'_z &= \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' &= w'_x \mathbf{e}'_x + w'_y \mathbf{e}'_y + w'_z \mathbf{e}'_z \\ &= \mathbf{w}, \end{aligned}$$

the form of Eq. (26) should be invariant, which is indeed the case:

$$\frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial t} = S \cdot y \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial x} + S \cdot \left( (R'_\Omega + 1) w'_y \mathbf{e}'_x - R'_\Omega w'_x \mathbf{e}'_y \right) + \nu \Delta \mathbf{w}'. \quad (27)$$

This symmetry can also be extended to compressible motions by adding  $\delta\pi'(x, y, z) = \delta\pi(y, x, z)$  to the list of change of variables.

Because the perturbations defining the linear stability limit also exhibit this symmetry (Appendix A), it has often been assumed in closure-stress models in the past. However, this is not a symmetry of the full Navier-Stokes equation (Speziale & Mhuiris 1989; Speziale 1991; Salhi & Cambon 1997), nor of the  $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$  equation). This is also apparent in a direct inspection of the structure of simulated turbulent flows. The  $R_\Omega = 0$ , wall-bounded turbulent flows contain large *streamwise* rolls living for about a hundred shear times (Hamilton et al. 1995). We have also found rolls more or less aligned in the streamwise direction in our  $R_\Omega = 0$  shearing sheet simulations, although we did not try to precisely quantify their survival time. Furthermore, at the anticyclonic marginal stability limit ( $R_\Omega = -1$ ), we did observe sheared *shearwise* rolls (i.e. rolls in  $y$  direction) in our simulations, as one might expect

from the symmetry of the linearized Navier-Stokes equation. The anticyclonic roll survival time is observed to be rather short compared to their cyclonic counterpart, as they are tilted by the shear and loose their coherence in a few shear times at most. This roll lifetime is the main difference we found between the cyclonic and anticyclonic side. This is related to the fact that a streamwise roll does not reduce the shear on the anticyclonic subcritical domain (in opposition to the cyclonic one).

In any case, we have found turbulence away from the marginal stability limit in cyclonic flows, and the symmetry with respect to  $R_\Omega = -1/2$  is violated both in our simulations, and in supercritically rotating shear flow turbulence (see, e.g., Salhi & Cambon 1997 and references therein). This makes the predictions of the stress-closure model of Ogilvie (2003) and Garaud & Ogilvie (2005) unreliable in both subcritical and supercritical flows.

#### 4.4. Resolution, effective Reynolds number and scale invariance

The results of Sects. 3.3 and 3.4 involve fairly high Reynolds numbers, and one might ask if our simulations are resolved enough in these regimes. This question has a priori two different aspects, as one can guess from Fig. 9: resolving the self-sustaining process smallest relative scale  $d/l_M$ , and resolving the relative dissipation scale  $d/l_d$ .

For the problem considered in this paper, resolving the first scale is a *sine qua non* condition: if it is not satisfied, turbulence does not show up, independently of the simulation Reynolds number, because the required scale coupling shown in Fig. 9 for the self-sustaining process to exist cannot take place. This shows up in Fig. 7 as the vertical transition limit from turbulent to laminar that we obtained for any given resolution, for large enough Reynolds numbers.

Resolving the dissipation scale is important to ascertain that direct numerical simulations such as the ones performed here are not biased by (the presence or absence of) numerical dissipation, and this issue is often raised in the fluid mechanics literature. For the time being, we note that, at the transition Reynolds number, the inertial domain should be non-existent or extremely reduced, so that  $l_M \simeq l_d$  and both resolution requirements should be directly related (this point, used in Sect. 4.4.1 is justified in Sect. 4.4.2). We can therefore consider that the “effective Reynolds number”  $Re_{\text{eff}}$  of our simulations is the largest transition Reynolds number  $Rg$  correctly determined at a given resolution<sup>12</sup>, as discussed in Sect. 3.4.

Note that this effective Reynolds number is problem-dependent: the self-sustaining process qualitative and quantitative characteristics both depend on the considered problem; furthermore, in simulations of isotropic turbulence, the self-sustaining process is absent, and replaced by a forced amplitude of the largest Fourier modes, so that the effective Reynolds number in this case is the one related to the dissipation scale.

<sup>12</sup> With all the provisos discussed in Sect. 3.2 about the role of the choice of the initial conditions and turbulence minimal survival lifetime.

Let us now examine the two requirements mentioned above in more detail.

##### 4.4.1. Resolving the self-sustaining process

First, we would like to qualitatively comment on the difference of resolution requirements between cyclonic and anticyclonic flows.

As discussed in Sect. 4.5, the nature of the shearwise boundary condition has apparently only a small influence on the results; this is exemplified by the similar transition Reynolds numbers found in our simulations and in experiments on rotating shear flows (see Fig. 14). This suggests that at least some of the characteristics of the self-sustaining process of non-rotating plane Couette flows are relevant here. At the cyclonic marginal stability limit, this self-sustaining process has a time-scale  $t_{\text{SSP}} \sim 100S^{-1}$  (Hamilton et al. 1995; Waleffe 1997). The requirement that, at the transition Reynolds number, the viscous time scale at scale  $l_M$  exceeds  $t_{\text{SSP}}$  reads  $l_M^2/\nu \gtrsim 100S^{-1}$ , i.e.,  $l_M/d \lesssim (100/Rg)^{1/2} \sim 1/4$  for  $Rg \sim 1500$  (Longaretti & Dauchot 2005). This probably explains why the resolution requirement is so low on the cyclonic side. Conversely, we have mentioned at the end of the previous subsection that rolls (which are an apparently ubiquitous ingredient in subcritical turbulence) do not survive more than a few shear times in anticyclonic flows. Therefore, the anticyclonic self-sustaining process time-scale cannot exceed a few shear times as well, whatever its nature. The same reasoning as the one exposed above leads to  $l_M/d \lesssim$  a few  $(1/Rg)^{1/2} \sim$  a few  $\times 1/70$ , an already much more demanding constraint. It is obviously related to the larger transition Reynolds number found at the anticyclonic marginal stability, compared to the cyclonic one.

As mentioned several times already, the self-sustaining process is identified and understood only at the cyclonic marginal stability limit in wall-bounded Couette flows. Consequently, it is difficult to explain why the resolution demand grows so much faster with rotation number “distance” to marginal stability for anticyclonic flows than for cyclonic ones. However, we speculate that this is connected to the fact the rotation time scale is only a fraction of  $S^{-1}$  for cyclonic flows, whereas it always exceeds  $S^{-1}$  for anticyclonic ones.

Next, let us try to quantify the resolution that would be needed to successfully simulate Keplerian flows. The phenomenology of subcritical turbulence developed by Longaretti (2002) predicts that  $d/l_M \sim Rg^{1/2}$  and  $\langle v_x v_y \rangle \propto 1/Rg$ . This phenomenology implicitly assumes that the relevant time-scale of the self-sustaining process is  $\sim S^{-1}$ , so that it would need to be modified to be applied to cyclonic flows, but it should be adequate for anticyclonic ones, with appropriate modifications. In particular, we have already pointed out in Sect. 4.1 that the last relation needs to be amended into  $\langle v_x v_y \rangle \propto 1/(Rg - R_c)$  with  $R_c \simeq 3000$  on the anticyclonic side. This suggests that

$$\frac{\delta}{d} \simeq \frac{\gamma}{(Rg - R_c)^{1/2}} \quad (28)$$

is the appropriately generalized scale relation ( $\delta$  being the smallest scale accessible to the simulation, i.e., the resolution).

**Table 2.** Resolution, effective Reynolds number and  $\gamma$  factor for the Fourier code on the anticyclonic side.

$(d/\delta)^3$	$Re_{\text{eff}}$	$\gamma$
$32^3$	6000	1.71
$64^3$	12 000	1.48
$128^3$	38 000	1.46

Table 2 gives the values of  $\gamma$  and  $Re_{\text{eff}}$  for the three different resolutions of our anticyclonic simulations.

Although the statistics is a little poor to draw firm conclusions, it appears that  $\gamma$  is nearly constant compared to the variations in both resolution and transition Reynolds number, and our simulations are therefore consistent with Eq. (28). The resolution needed to simulate Keplerian flows has been computed based on the estimate Eq. (28), with  $\gamma = 1.5$  (the  $R_c$  correction has little influence on these estimates). The results are shown in Table 1. For comparison purposes, note that the largest turbulence simulation ever performed was  $4000^3$ , but was not run for hundreds or thousands of dynamical times. Although the results gathered here are probably only indicative, as they are based on guess work, they strongly suggest that simulating subcritical turbulence in Keplerian flows is beyond present day computer capabilities, and support the idea that the subcritical Keplerian flows simulations performed to date were limited by numerical resolution, as suggested by Longaretti (2002).

#### 4.4.2. Resolving the dissipation scale

In statistically steady turbulence, the dissipation scale can be defined from the balance between input and dissipation described by Eq. (8). The energy input is provided by  $S\langle v_x v_y \rangle$ . The Fourier analysis of this quantity is shown in Fig. 10, and is dominated by the large scales. Conversely, the Fourier content of  $\epsilon$ , Eq. (7), is dominated by the small scales (large  $k$ ), comparable to the dissipation scale, as illustrated below.

Resolving the dissipation scale is important with Fourier codes in order to prevent energy accumulation at the smallest scales, which may bias the results, or lead to code crash<sup>13</sup>.

The general definition of the dissipation wavelength  $k_d$  follows from the evaluation of Eq. (7) in Fourier space:

$$\epsilon = 2\nu \int_0^{k_d} k^2 E(k) dk \quad (29)$$

where it is assumed that  $E(k)$  is cut-off at  $k_d$ , either abruptly, or through some modelling of the dissipation range (see e.g. Lesieur 1990).

In simulations of homogeneous and isotropic turbulence, the energy input is imposed from the outside: the amplitude of the largest Fourier mode is held fixed, and Fig. 9 reduces to the inertial and dissipation range. In this context, the inertial spectrum reduces to the Kolmogorov spectrum given by:

$$E_K(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (30)$$

<sup>13</sup> One may also include an hyper-viscosity term to prevent code crash, but this turned out not to be necessary.

where the Kolmogorov constant  $C_K \approx 1$ . Cutting off this spectrum at wavelength  $k_d$  and injecting it in the definition Eq. (29) leads to the well-known expression of the Kolmogorov wave number,  $k_K = (\epsilon/\nu^3)^{1/4}$ . The related Kolmogorov scale (inverse of the wave number) is a largely used estimate of the dissipation scale.

In the fluid mechanics community one often requires that the Kolmogorov scale be resolved, even if the considered turbulence is not isotropic and homogeneous, as, e.g., in shear flow turbulence (see, e.g., Pumir 1996). However, in our simulations, the observed spectrum is substantially different from the Kolmogorov one, especially at the transition Reynolds number (see top panel of Fig. 12). Indeed, at the turbulent-laminar transition, one does not expect nor observe the presence of an inertial domain in the spectrum. One may therefore ask what relation the Kolmogorov scale bears to the dissipation scale of the problem.

Consider, e.g., the  $32^3$  and  $64^3$  energy spectra obtained at a Reynolds number  $Re = 6000$  and a rotation number set to  $-1.016$ . These spectra are shown on the top panel of Fig. 12. The concordance of the spectra at both  $32^3$  and  $64^3$  resolutions indicates that the dissipation scale in the  $32^3$  simulation is resolved (this is consistent with the shape of the spectrum at the smallest  $32^3$  resolved scales, much steeper than Kolmogorov). It appears that the largest distance to marginal stability  $|R_\Omega + 1|$  reliably accessible at a given resolution on the laminar-turbulent transition (as checked by higher resolution simulations) corresponds to the various vertical line of transition displayed in Fig. 7 for this resolution. In other words, the  $Re = 6000$ ,  $R_\Omega = -1.016$  point at  $32^2$ , and the  $Re = 12000$ ,  $R_\Omega = -1.024$  at  $64^3$ , are resolved. This feature makes us confident that the transition point determined at  $128^3$  is the correct one, although we did not cross-check it at  $256^3$ , due to the limitations in the available computational resources.

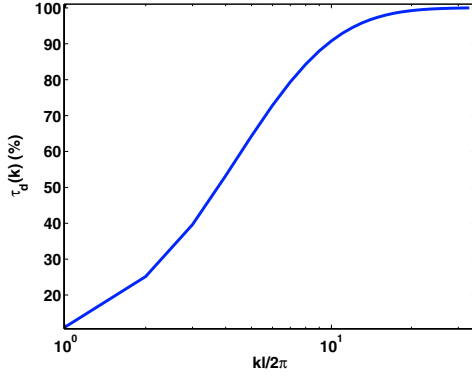
We have thus determined the largest transition Reynolds number where the dissipation scale is confidently resolved in these anticyclonic runs at the various resolutions we have used ( $32^3$ ,  $64^3$  and  $128^3$ ). In other words, we know the effective dissipation scale of these simulations, as it must be comparable to the largest wave number available in the simulation<sup>14</sup>:  $k_d \approx 3^{1/2} \pi N/d$ , where  $N$  is the resolution. Furthermore, we can compute the Kolmogorov wave number  $k_K$  for these runs, as  $\nu = Re/Sd^2$ , and as  $\epsilon$  follows from Eq. (8) and the transport (e.g., with the help of the transport/transition-Reynolds-number correlation displayed in Fig. 8). The resulting ratio  $R = k_d/k_K$  is given in Table 3.

Although the values of the ratio  $R$  quoted in Table 3 are of order unity, a systematic trend seems to appear, indicating that resolving the Kolmogorov wave number is possibly not the relevant concept at the transition Reynolds number, as it is not stringent enough; nevertheless, the required resolution derived from the Kolmogorov wave number is apparently semi-quantitatively correct, at least for the rotation numbers explored

<sup>14</sup> This expression corrects a misprint in Pumir (1996) for the diagonal of a cube in Fourier space; although this largest wave number is resolved only in discrete directions, this definition is adopted here for ease of comparison with this earlier work.

**Table 3.** Resolution, dissipation to Kolmogorov wave number ratio, and corresponding transition Reynolds number (see text for details).

$N$	$R = k_d/k_K$	$Rg$
32	1.23	6000
64	1.73	12 000
128	2.66	35 000

**Fig. 11.** Cumulative mean dissipation spectrum for a  $64^3$  simulation at  $Re = 6000$  for  $R_\Omega = -1.016$ .

here. Of course when going to Reynolds numbers well in excess of  $Rg$  at a given  $R_\Omega$ , the Kolmogorov wave number should always give the right estimate of the dissipation scale, as the inertial range becomes more and more prominent in the overall spectrum.

To conclude this aspect of the discussion, we note that both the non-Kolmogorovian shape of the spectrum at transition and the relatively small values of  $\epsilon$  at the various transition Reynolds numbers used here, most probably combine in the end to explain why we can reach rather large Reynolds numbers at rather moderate resolutions.

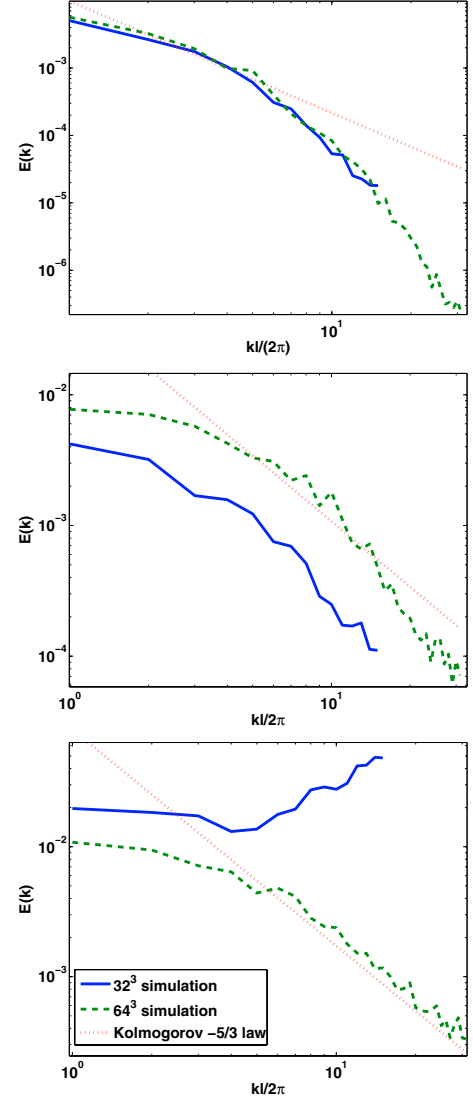
In order to have a better grasp on which scales contribute most to the dissipation, we have computed a quantity,  $\tau_d(k)$ , defined by

$$\tau_d(k) = 2\nu \int_{-k}^k dk_x \int_{-k}^k dk_y \int_{-k}^k dk_z (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) E(k_x, k_y, k_z). \quad (31)$$

Comparing with Eq. (29), it appears that  $\tau_d(k)$  represents the fraction of dissipation due to scales  $|k_x| < k$ ,  $|k_y| < k$  and  $|k_z| < k$ . This quantity is plotted in Fig. 11 with the  $64^3$  simulation spectrum. It appears that more than 95% of the total dissipation is due to  $k < 1/2k_{\max}$  (i.e., the  $32^3$  resolution). Also, comparing Fig. 11 with the top panel of Fig. 12 indicates that most of the dissipation comes from the part of the spectrum which is steeper than the Kolmogorov spectrum, as one would expect.

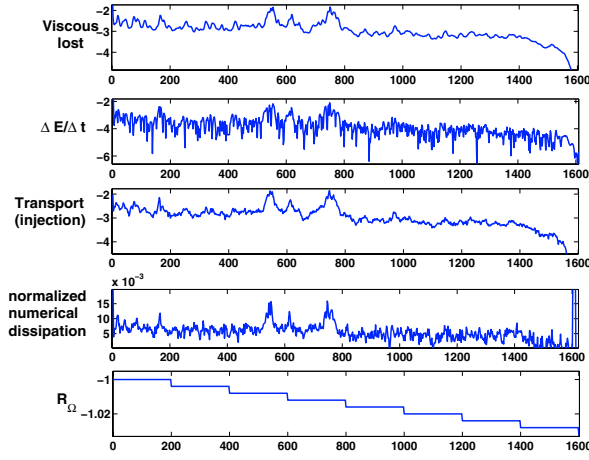
It is also instructive to examine the spectral behavior at Reynolds number larger than the transition Reynolds number, as shown in Fig. 12.

This figure displays energy spectra of the velocity deviation from the laminar flow. The rotation number is fixed

**Fig. 12.** Energy spectra (of the velocity deviation from the laminar flow), for two different resolutions ( $32^2$  and  $64^3$ ). The rotation number is  $R_\Omega = -1.016$  in all cases. *Top panel:*  $Re = 6000$ . *Middle panel:*  $Re = 12000$ . *Bottom panel:*  $Re = 20000$ . At this resolution only the top panel simulations are resolved, as expected. See text for discussion.

at  $R_\Omega = -1.016$  for all spectra, and they have been averaged over a 200 shear time period to reduce the noise. From top to bottom, the Reynolds number is 6000, 12 000 and 20 000 respectively. The  $32^3$  simulations are resolved only in the top panel, while the  $64^3$  simulations should be resolved in the top two panels. Comparing the second panel with the first reveals a couple of interesting points:

- The  $64^3$  simulation shows an extension of the spectrum, compatible with a small inertial range (this is difficult to ascertain because of the remaining noise in the simulation), while still resolving at least the top of the dissipation range, but marginally so.



**Fig. 13.** Energy budget for a  $64^3$   $Re = 20000$  run with our Fourier code. Each plot represent a term in Eq. (8). The numerical dissipation is normalized by the total dissipation  $\partial\langle w^2/2\rangle/\partial t - S\langle w_x w_y\rangle$ . We find that numerical dissipation is about 1% of the total dissipation. NB: Vertical axis of the three first plots is in logarithmic scale.

- The  $32^3$  simulation begins to significantly deviate from the  $64^3$  simulation, although the trend is similar.

The third panel also displays a fairly relevant piece of information. The  $64^3$  simulation shows both the self-sustaining mechanism scales and the inertial spectra. However, the dissipation scale does not seem to be resolved. This is not unexpected, since increasing the Reynolds number necessarily increases the inertial spectrum, and therefore decreases the dissipation scale. Apparently, the dissipation scale is probably not far off the resolved scales, so that the simulation nevertheless does not noticeably deviate from the expected behavior. But note that the  $32^3$  simulation is clearly strongly unresolved, with energy accumulating in the small scales in order for a statistically steady equilibrium to be achieved: indeed, as this simulation resolves the self-sustaining mechanism scale, turbulence is present; however, as the smallest resolved scale is significantly larger than the dissipation scale, the spectrum must be strongly deformed to achieve a dissipation which is consistent with the energy input due to the turbulence self-sustaining mechanism.

These simulations illustrate that if the dissipation scale is not resolved, the simulated flow does not necessarily relax, but the deformation of both the amplitude and shape of the spectrum most likely results in, e.g., unreliable estimates of the turbulent transport. In particular, the reliability of finite difference simulations where no viscous term is explicitly included in the code is unclear<sup>15</sup>.

On the other hand, this point is related to the fact that the numerical dissipation in a Fourier code is extremely weak, so that the deformation of the spectrum may be quite large. To compute the numerical dissipation explicitly, we have estimated its effect on the turbulent energy budget.

<sup>15</sup> We did not further investigate this question here.

We plot an example of such an energy budget in Fig. 13, where all the terms in Eq. (6) are evaluated, so that the remaining difference measures the code dissipation. One should note that these plots are integrated over 2 shear times, so that they include the numerical dissipation due to the desampling procedure (done at each time loop) and losses from the remapping procedure (done each shear time). The presented result is generic: for all our simulations, numerical dissipation is found to be at most a few percent of the total dissipation.

In summary, we have tried as much as possible to ensure that our determination of the transition Reynolds number and turbulent transport do not suffer from lack of resolution of the dissipation scale. Note also that the results of the Fourier and finite difference codes are consistent with each other. This makes us confident that our simulations faithfully represent the relevant physics, down to and including the dissipation scale, within the relevant  $(Re, R_\Omega)$  domain determined at each resolution in Fig. 7.

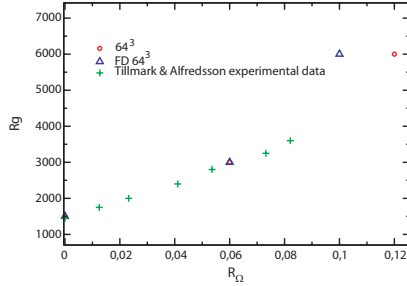
#### 4.4.3. Shearing sheet simulations and scale invariance

Recently, Balbus (2004) has argued that the scale invariance of the inviscid form of the Navier-Stokes equation used here makes any small scale solution exist at large scales as well. This argument seems to imply that simulations of the kind performed here should not be resolution limited. However, neither the simulations of Balbus et al. (1996), Hawley et al. (1999), the ones performed here, nor a real disk, are scale invariant. In shearing sheet simulations, the box size defines a scale; in a real disk, the disk scale height does. Furthermore, we point out that the mechanism analyzed by Waleffe (1997), whose qualitative and semi-quantitative relevance to the present work has been pointed out hereabove, is somewhat insensitive to the nature of the imposed boundary condition. Along with the results found in this paper, this suggests that only a scale rather than a specific boundary condition needs to be imposed for statistically stationary turbulence to show up in numerical simulations, as exemplified in Sect. 3.4. Finally, the role of an increasingly dominant Coriolis force is not to define another scale, which it cannot, but to modify the relative range of scales that are required for turbulence to exist (most likely because of its more and more stringent time-scale requirement), so that numerical resolution *does* play an important role in subcritical turbulence detection, as can be seen from Fig. 7.

#### 4.5. Boundary conditions and aspect ratio

Assessing the role of boundary conditions on the existence and properties of subcritical turbulence is an important question, since real accretion disk boundary conditions are not reproducible in experimental flows. However, the resolution demand in the local shearing box is already so large for a Keplerian flow that a global simulation of a subcritical Keplerian disk flow is totally out of reach. The best we can do is to compare numerical experiments with shearing sheet and rigid/periodic boundary conditions with one another, and with experimental results. This is the object of this section.





**Fig. 14.**  $Rg(R_\Omega)$  plot from experimental data (Tillmark & Alfredsson 1996, crosses), and our numerical simulations using  $64^3$  Fourier code (circles) and  $64^3$  finite difference code (triangles) with cubic box and shearing sheet boundary conditions.

Before doing so, let us point out some important differences between the two types of boundary conditions:

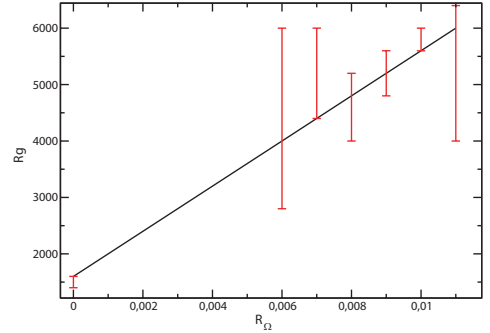
- In the semi-Lagrangian variables defined by Eqs. (10), the only difference is that the velocity deviation from the laminar flow cancels on the rigid boundary in the rigid/periodic case, while it is periodic in the shear direction (as in the others) in the shearing sheet case. This results in a suppression of the boundary layer in the shearing sheet case.
- Characteristic sizes are the same in both cases. However, while for rigid/periodic conditions, structures are forced to remain more or less stationary with respect to the walls on average, this is not the case with shearing sheet boundary conditions, where structures can move at random through the boundary. As a consequence, a long-lasting mean flow distortion is apparent with rigid/periodic boundary conditions (due to the matching of turbulently enhanced transport with the viscous one in the boundary layer), while in shearing-sheet simulations, although such a distortion is usually locally found at any given time, it averages out over time, due to its random localization.
- This relates to a profound difference between accretion disks and actual experiments. In the latter, the flow profile adjusts to the imposed boundary condition through a pressure redistribution, and a stationary state is reached. In the former, this cannot take place, and the disk is never stationary, due to the resulting turbulent transport of mass and angular momentum.

In spite of these differences, we shall nevertheless argue that the choice of boundary conditions has only a limited impact on some of our qualitative and semi-quantitative results. This suggests that the underlying mechanisms are reasonably closely related in both settings, although much more work than what has been possible to do here is required to ascertain this conclusion.

#### 4.5.1. Cyclonic rotation

Figure 14 displays a comparison of our numerical results with the Tillmark & Alfredsson (1996) data, in the range of rotation number where these data were collected.

The agreement between the two is fair, with the Fourier code results being sensibly more compatible with the data than



**Fig. 15.**  $Re_c$  as a function of  $R_\Omega$  for cyclonic rotating plane couette flow.

the finite difference code ones, at the larger rotation numbers. This follows because, at the same “resolution”, a Fourier code is physically more resolved than a Finite difference code. Note also that some  $128^3$  simulations were performed using the Fourier code and the same transition thresholds were found as for the  $64^3$  simulations. This supports the idea that the  $64^3$  Fourier code results are not resolution limited.

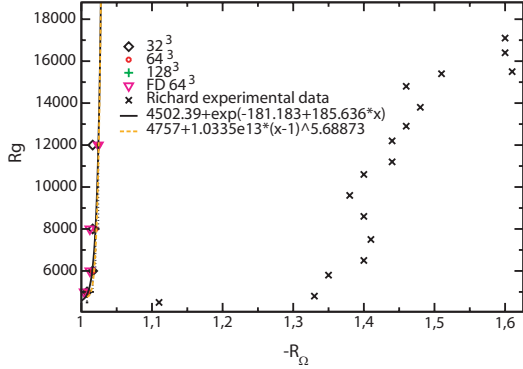
We have also made a few runs using rigid (shearwise direction) and periodic (other directions) boundary conditions with our ZEUS-like code. At each rotation number, we made a few tries with different Reynolds numbers to locate the transition threshold. Each run was computed from the same initial condition for 400 shear times with  $80 \times 80 \times 40$  grid points and a  $L_x = 1.75\pi L_y = 1 L_z = 1.2\pi$  aspect ratio box (corresponding to the “minimal flow unit” aspect ratio, i.e. the smallest box in which turbulence can be sustained with these boundary conditions: see Hamilton et al. 1995, for details). The error bars upper bounds correspond to the lower Reynolds for which turbulence is found and the lower bound the higher Reynolds number for which turbulence is lost. The numerical data are shown in Fig. 15; the error bars reflect our poor sampling, not intrinsic fluctuations in the transition Reynolds number. These data are fitted by a linear law:

$$Rg = 1400 + 4 \times 10^5 R_\Omega, \quad (32)$$

the slope of which is 15 times steeper than the one found from the experimental data.

This dramatic difference in transition Reynolds number with respect to the experimental and shearing sheet results is in fact controlled by the choice of the simulation box aspect ratio. For example, let us choose a longer box in the  $z$  direction (i.e.  $L_x = 1.75\pi L_y = 1 L_z = 2.4\pi$ ). With such a choice, turbulence is sustained at  $R_\Omega = 0.01$  and  $Re = 2400$ , much closer to the expected transition Reynolds of Fig. 14 than what is predicted by Fig. 15. Finally, Komminaho et al. (1996), using a very elongated simulation box in the flow direction, found transition right at the experimentally determined Reynolds number ( $Rg = 3000, R_\Omega = 0.06$ ).

These results show the important role of aspect ratio in subcritical turbulence simulations with rigid/periodic boundary conditions. Apparently, the use of shearing sheet boundary conditions relaxes this constraint. This is reasonable since the



**Fig. 16.**  $Rg(R_\Omega)$  plot from experimental data on Taylor-Couette flows (Richard 2001, crosses), and the various numerical simulations results and related fits shown in Fig. 7.

shearing sheet box allows more freedom than rigid boundary conditions. In actual experiments, the aspect ratio is not an issue since usually very large  $L_x/L_y$  and  $L_z/L_y$  are used, so that the turbulence coherence length can freely adjust itself in these directions.

These results also indirectly suggest that the turbulence saturation mechanism is not strongly affected by the use of shearing sheet boundary conditions. One would nevertheless expect that the reduction of the shear in the middle of the flow, due to the mean velocity profile modification which occurs with rigid/periodic boundary conditions, produces a reduced turbulent transport. This is indeed the case: e.g., the turbulent transport at marginal stability ( $R_\Omega = 0$ ) is  $\langle v_x v_y \rangle \simeq 2 \times 10^{-3} (Sd)^2$  for the rigid/periodic boundary conditions<sup>16</sup>, while one has  $\langle v_x v_y \rangle \simeq 0.4 (Sd)^2$  throughout the flow with the shearing sheet boundary conditions, although the transition Reynolds number is the same in both instances. These features most probably find a natural explanation if the turbulence amplitude saturation mechanism is primarily controlled by the system nonlinearities, and not by the mean profile deformation.

#### 4.5.2. Anticyclonic rotation

The comparison of our numerical results with Richard (2001) data is shown in Fig. 16.

The discrepancy between the experimental and numerical data is striking, especially at the light of the remarkable consistency observed for cyclonically rotating flows. In particular, the increase in transition Reynolds is considerably steeper in the numerical data than in the experimental ones. Note however that the numerical and experimental data seem to give the same transition Reynolds number *at the marginal stability boundary*.

Longaretti & Dauchot (2005) have argued that the flow curvature plays no role in the anticyclonic flow data of Richard (2001), so that the origin of the large discrepancy between the

numerical and experimental results must be found elsewhere<sup>17</sup>. In this respect, note that experimental secondary flow distortions are much more likely to induce a linear instability somewhere in the flow on the anticyclonic side as on the cyclonic one. Indeed, recall that the stability limit is defined by Eq. (9). Consider the cyclonic marginal stability limit first ( $R_\Omega = 0$ ), and assume that one moves away from it by imposing a small change in rotation  $\delta\Omega$ . The required change in shear profile  $\delta S$  to locally achieve  $2\delta\Omega/(S(y) + \delta S) < 0$  is large:  $\delta S \sim S(y)$  is needed. Conversely, at the anticyclonic marginal stability limit ( $R_\Omega = -1$ , i.e.,  $S = 2\Omega$ ), upon a small change  $\delta\Omega$  of the rotation rate, a change  $\delta S \simeq 2\delta\Omega \ll S$  suffices to locally make  $2\Omega/S > -1$  and produce a linear instability somewhere in the system. This argument shows that the presence of secondary flows, such as Ekman's circulation, can easily make the flow more unstable than it would be in its absence in anticyclonic flows, whereas this is much more difficult to achieve in cyclonic ones. This may easily explain the discrepancy between numerical and experimental results shown in Fig. 16, while the agreement is remarkable at the marginal stability boundary.

## 5. Summary and conclusions

The central results of this paper are displayed in Figs. 4, 5, 7–9, and their significance and implications are discussed in Sects. 3.3, 3.4, 4.1–4.4. The main implications of these results are summarized in the abstract. In the course of the discussion, we have found that a number incorrect statements have been made in the literature, most notably concerning the existence and importance of subcritical turbulence in presence of a dynamically significant Coriolis force. We have also found that resolution is a key issue for subcritical anticyclonically rotating flows (including Keplerian ones), and have quantified the relation between resolution, rotation and Reynolds number. In relation to this, we believe that the question of resolution of the dissipation scale is not emphasized enough in the astrophysics literature, and the potential effects of this problem are most probably underestimated.

Our simulations do not faithfully represent a real disk: neither vertical stratification, nor, more critically, realistic vertical boundary conditions have been implemented. A real (hydrodynamic) disk moves either in vacuum, or, more probably, in a hot corona. In both cases, one expects the real vertical boundary condition in the disk to be (nearly) stress-free. We have made some very preliminary simulations of a stratified disk-corona system to test this idea, where most of the inertia lies in the disk. Although a strong numerical mixing of the corona and the disk at the interface prevents us to evolve the system for a long time ( $50t_s$  max), no significant difference in the overall dynamics of the disk did show up. However this problem probably requires more careful investigations to validate this conclusion.

Overall, the outcome of this investigation still leaves us with the issue of transport unresolved in MHD-inactive flows

<sup>16</sup> This is measured in the middle of the flow where the turbulent transport is maximized, and viscous transport negligible.

<sup>17</sup> In any case, the flow curvature always increases the transition Reynolds number, so that including curvature in the analysis of this problem can only make it worse, not better.

(and possibly in some MHD-active ones), and we will briefly comment the various ways out of this conundrum.

We first note that an efficient enough local instability should lead to a large enough turbulent transport, because the transition to fully developed turbulence usually occurs to significantly lower Reynolds numbers in these systems than the ones found here. This is true, e.g., in rotating shear flows of the type considered here, in the linearly unstable regime. However, no such instability has yet been found in hydrodynamical Keplerian flows, either stratified or not, as discussed in the introduction. It remains to be seen whether another such instability can operate in hydrodynamic disks, but the list of potential driving agents has by now significantly been narrowed.

In what concerns the YSO disks dead-zone in particular, it may be that the disk stirring due to the MRI above and below the dead-zone itself (Fleming & Stone 2003) might provide enough transport in the end if it excites large enough large scale 2D disturbances of the right type (Ioannou & Kakouris 2001) in the disk. However, this option remains to be worked out in detail.

It has often been noted that transport in disks may not be due to turbulence but to waves (see, e.g., Papaloizou & Lin 1995 for an introduction to the subject). Recent results on the existence of vortices in stratified disks (Barranco & Marcus 2005) and on the coupling of waves to vortices resulting in efficient transport in 2D dynamics (Bodo et al. 2005 and references therein) support this idea.

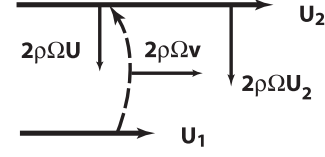
## Appendix A: Displaced particle analysis for rotating flows

The following line of argument closely follows Tritton & Davies (1981) and Tritton (1992). Let us consider a rotating shear flow, whose dynamics is controlled by Eq. (1). As in Sect. 2.1,  $x$  is the direction of the flow,  $y$  the direction of the shear, and  $z$  the direction perpendicular to the  $x, y$  plane, in which the rotation  $\Omega$  is applied. The laminar equilibrium velocity  $\mathbf{u}_L = (U(y), 0, 0)$  generates a Coriolis force in the  $y$  direction of magnitude  $-2\rho\Omega U$  (in algebraic value), which is balanced by the equilibrium generalized pressure gradient  $-d\pi/dy$ .

Let us further consider two fluid “rods” of infinite extent in the streamwise direction  $x$ , and located at positions  $y_1$  and  $y_2 = y_1 + \delta y$ . The streamwise velocities of these rods are  $U_1$  and  $U_2$ , respectively. Let us assume that one displaces the rod at  $y_1$  to location  $y_2$ , without disturbing the pressure distribution. Although the total work of the Coriolis force vanishes, there is a net partial work due to the force component in the  $x$  direction which originates in the velocity  $v$  of this displacement in the  $y$  direction. Because of this partial work, the rod experiences a change of  $x$  momentum, and therefore of  $x$  velocity, which reads

$$U'_1 - U_1 = \int 2\Omega v dt = 2\Omega \delta y, \quad (\text{A.1})$$

so that the velocity  $U'_1$  of the rod when it reaches location  $y_2$  differs from the equilibrium velocity  $U_2$ , and correlatively, the  $x$  component of the Coriolis force acting on this displaced



**Fig. A.1.** Sketch of the effect of the Coriolis force on the displaced particle (see text).

rod,  $-2\rho\Omega U'_1$  (in algebraic value) differs from the equilibrium one,  $-2\rho\Omega U_2$  (see Fig. A.1).

Consequently, the net result between the equilibrium pressure gradient and the Coriolis force will tend to restore the displaced rod to its equilibrium position<sup>18</sup> if  $U'_1 > U_2$ , or displace it further if  $U'_1 < U_2$ . From Eqs. (A.1) and (3), one obtains

$$U'_1 - U_2 = 2\Omega \delta y - \frac{dU}{dy} \delta y = S(R_\Omega + 1)\delta y, \quad (\text{A.2})$$

where  $S = -dU/dy$  is the shear. From this result, the net force (Coriolis and pressure) on the displaced rod reads

$$2\rho\Omega(U_2 - U'_1) = -\rho S^2 R_\Omega(R_\Omega + 1)\delta y. \quad (\text{A.3})$$

This shows that equilibrium is always restored when  $R_\Omega > 0$  or  $R_\Omega < -1$  and destroyed otherwise (equality holds at marginal stability). This is the result quoted in Sect. 2.1. This result can also be directly derived from the linearized eulerian equation of motion with the use of spatially uniform perturbations of the pressure and the velocity.

*Acknowledgements.* The undertaking and completion of this work has benefitted from discussions with a number of colleagues in the past few years, most notably O. Dauchot, F. Daviaud, B. Dubrulle, F. Lignières, and J.-P. Zahn. P.Y.L. also acknowledges discussions held at the KITP conference on the physics of astrophysical outflows and accretion disks, with C. Gammie, J. Hawley, B. Johnson, E. Quataert, and J. Goodman. Interactions with O. Blaes and G. Bodo have been particularly fruitful. David Clarke has provided us with his version of the ZEUS code, and his friendly help (as well as G. Bodo's) in the initial phases of this project is gratefully acknowledged. We thank Françoise Roch, Françoise Berthoud and Alain Pasturel for their help in accessing the computing resources of the SCCI of the Grenoble Observatory, and of the PHYNUM and MEDETPHY platforms of the Grenoble University CIMENT project. A large fraction of the simulations presented here has also been performed at IDRIS (French national computational center).

## References

- Afshordi, N., Mukhopadhyay, B., & Narayan, R. 2005, *ApJ*, 629, 373
- Arlt, R., & Urpin, V. 2004, *A&A*, 426, 755
- Balbus, S. A. 2003, *ARA&A*, 41, 555
- Balbus, S. A. 2004, *A&A*, submitted [arXiv:astro-ph/0408510]
- Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 1991, *ApJ*, 376, 214
- Balbus, S. A., Hawley, J. F., & Stone, J. M. 1996, *ApJ*, 467, 76
- Barranco, J. A., & Marcus, P. S. 2005, *ApJ*, 623, 1157

<sup>18</sup> Consider the direction and magnitude of the Coriolis force and pressure force along the  $y$  axis to derive the effect of the inequality.



- Bech, K. H., & Andersson, H. I. 1997, *J. Fluid Mech.*, 347, 289
- Blaes, O. M. 1987, *MNRAS*, 227, 975
- Bodo, G., Chagelishvili, G., Murante, G., et al. 2005, *A&A*, 437, 9
- Bottin, S., Dauchot, O., & Daviaud, F. 1997, *Phys. Rev. Lett.*, 79, 4377
- Brandenburg, A., & Dntrants, B. 2001 [arXiv:astro-ph/0111313]
- Brosa, U., & Grossmann, S. 1999, *European Phys. J. B*, 9, 343
- Cabot, W. 1996, *ApJ*, 465, 874
- Cambon, C., Benoit, J., Shao, L., & Jacquin, L. 1994, *J. Fluid Mech.*, 278, 175
- Chagelishvili, G. D., Zahn, J.-P., Tevzadze, A. G., & Lominadze, J. G. 2003, *A&A*, 402, 401
- Darbyshire, A. G., & Mullin, T. 1995, *J. Fluid Mech.*, 289, 83
- Dauchot, O., & Daviaud, F. 1995a, *Phys. Fluids*, 7, 335
- Dauchot, O., & Daviaud, F. 1995b, *Phys. Fluids*, 7, 901
- Daviaud, F., Hegseth, J., & Bergé, P. 1992, *Phys. Rev. Lett.*, 69, 2511
- Drazin, P., & Reid, W. 1981, *Hydrodynamic stability* (Cambridge Univ. Press)
- Dubrulle, B. 1993, *Icarus*, 106, 59
- Dubrulle, B., & Zahn, J.-P. 1991, *J. Fluid Mech.*, 231, 561
- Dubrulle, B., Dauchot, O., Daviaud, F., et al. 2005a, *Phys. Fluids*, accepted
- Dubrulle, B., Marié, L., Normand, C., et al. 2005b, *A&A*, 429, 1
- Eckhardt, B., & Mersmann, A. 1999, *Phys. Rev. E*, 60, 509
- Faisst, H., & Eckhardt, B. 2004, *J. Fluid Mech.*, 504, 343
- Fleming, T., & Stone, J. M. 2003, *ApJ*, 585, 908
- Gammie, C. F. 1996, *ApJ*, 457, 355
- Garaud, P., & Ogilvie, G. I. 2005, *J. Fluid Mech.*, submitted [arXiv:astro-ph/0503223]
- Goldreich, P., & Schubert, G. 1967, *ApJ*, 150, 571
- Goodman, J., & Balbus, S. A. 2001 [arXiv:astro-ph/0110229]
- Grossman, S. 2000, *Rev. Mod. Phys.*, 72, 603
- Hamilton, J. M., Kim, J., & Waleffe, F. 1995, *J. Fluid Mech.*, 287, 317
- Hawley, J. F. 1991, *ApJ*, 381, 496
- Hawley, J. F., Balbus, S. A., & Winters, W. F. 1999, *ApJ*, 518, 394
- Hawley, J. F., Gammie, C. F., & Balbus, S. A. 1995, *ApJ*, 440, 742
- Hersant, F., Dubrulle, B., & Hurlé, J.-M. 2005, *A&A*, 429, 531
- Ioannou, P. J., & Kakouris, A. 2001, *ApJ*, 550, 931
- Johnson, B. M., & Gammie, C. F. 2005a, *ApJ*, 626, 978
- Johnson, B. M., & Gammie, C. F. 2005b, in preparation
- Klahr, H. 2004, *ApJ*, 606, 1070
- Klahr, H. H., & Bodenheimer, P. 2003, *ApJ*, 582, 869
- Komminaho, J., Lundbladh, A., & Johansson, A. V. 1996, *J. Fluid Mech.*, 320, 259
- Leblanc, S., & Cambon, C. 1997, *Phys. Fluids*, 9, 1307
- Lerner, J., & Knobloch, E. 1988, *J. Fluid Mech.*, 189, 117
- Lesieur, M. 1990, *Turbulence in fluids* third edition (Kluwer)
- Longaretti, P.-Y. 2002, *ApJ*, 576, 587
- Longaretti, P.-Y., & Dauchot, O. 2005, in *Proc. Bristol 2004 Symposium on the laminar-turbulent transition*, ed. Kerswell & Mullin (Kluwer)
- Mukhopadhyay, B., Afshordi, N., & Narayan, R. 2005, *ApJ*, 629, 383
- Ogilvie, G. I. 2003, *MNRAS*, 340, 969
- Papaloizou, J. C. B., & Lin, D. N. C. 1995, *ARA&A*, 33, 505
- Papaloizou, J. C. B., & Pringle, J. E. 1984, *MNRAS*, 208, 721
- Pedley, T. J. 1969, *J. Fluid Mech.*, 35, 97
- Peyret, R. 2002, *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow* (Springer)
- Pumir, A. 1996, *Phys. Fluids*, 8, 3112
- Rüdiger, G., Arlt, R., & Shalybkov, D. 2002, *A&A*, 391, 781
- Richard, D. 2001, Ph.D. Thesis, Université de Paris VII
- Richard, D., & Zahn, J. 1999, *A&A*, 347, 734
- Richard, D., Dauchot, O., & Zahn, J.-P. 2001, in *Proc. of the 12th Couette-Taylor Workshop*, Evanston, USA
- Rogallo, R. S. 1981, *NASA STI/Recon Technical Report N*, 81, 31508
- Romanov, V. A. 1973, *Func. Anal. Appl.*, 7, 137
- Salhi, A., & Cambon, C. 1997, *J. Fluid Mech.*, 347, 171
- Satomura, T. 1981, *J. Meteor. Soc. Japan*, 59, 148
- Schmiegel, A., & Eckhardt, B. 1997, *Phys. Rev. Lett.*, 79, 5250
- Shakura, N. I., Sunyaev, R. A., & Zilitinkevich, S. S. 1978, *A&A*, 62, 179
- Shalybkov, D., & Ruediger, G. 2005, *A&A*, 438, 411
- Sipp, D., & Jacquin, L. 2000, *Phys. Fluids*, 12, 1740
- Speziale, C. G. 1991, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23, 107
- Speziale, C. G., & Mhuiris, N. M. 1989, *Phys. Fluids*, 1, 294
- Stone, J. M., & Balbus, S. A. 1996, *ApJ*, 464, 364
- Stone, J. M., & Norman, M. L. 1992, *ApJS*, 80, 753
- Taylor, G. I. 1936, *Proc. Roy. Soc. London A*, 157, 546
- Tevzadze, A. G., Chagelishvili, G. D., Zahn, J.-P., Chanishvili, R. G., & Lominadze, J. G. 2003, *A&A*, 407, 779
- Tillmark, N., & Alfredsson, P. H. 1996, in *Advances in Turbulence VI*, ed. S. Gavrilakis, L. Machiels, & P. A. Monkewitz (Kluwer), 391
- Tritton, D. J. 1992, *J. Fluid Mech.*, 241, 503
- Tritton, D. J., & Davies, P. A. 1981, in *Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence* (Springer-Verlag), 229
- Umurhan, O. M. 2005, *MNRAS*, submitted [arXiv:astro-ph/0506016]
- Umurhan, O. M., & Regev, O. 2004, *A&A*, 427, 855
- Urpin, V. 2003, *A&A*, 404, 397
- Waleffe, F. 1995, *Phys. Fluids*, 7, 3060
- Waleffe, F. 1997, *Phys. Fluids*, 9, 883
- Waleffe, F. 2003, *Phys. Fluids*, 15, 1517
- Wendt, G. 1933, *Ing. Arch.*, 4, 577
- Yecko, P. A. 2004, *A&A*, 425, 385

## **2. Impact of dimensionless numbers on the efficiency of MRI-Induced turbulent transport**



# Impact of dimensionless numbers on the efficiency MRI-induced turbulent transport.

Lesur, G.<sup>1</sup> and P-Y. Longaretti<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire d'Astrophysique Observatoire de Grenoble  
BP 53, 38041 GRENOBLE CEDEX 9*

Accepted ???. Received ?????; in original form ???

## ABSTRACT

The magneto-rotational instability is presently the most promising source of turbulent transport in accretion disks. However, some important issues still need to be addressed to quantify the role of MRI in disks; in particular no systematic investigation of the role of the physical dimensionless parameters of the problem on the dimensionless transport has been undertaken yet. After generalizing existing results on the marginal stability limit in presence of both viscous and resistive dissipation, we reexamine this problem through numerical simulations in the simplest setting of a local, unstratified shearing box, with the help of a pseudo spectral incompressible 3D code; viscosity and resistivity are explicitly accounted for. We focus on the effect of the dimensionless magnetic field strength, the Reynolds number, and the magnetic Prandtl number. First, we complete existing investigations on the field strength dependence by showing that the transport in high magnetic pressure disks close to marginal stability is highly time-dependent and surprisingly efficient. Second, we bring to light a significant dependence of the global transport on the magnetic Prandtl number, with  $\alpha \propto Pm^\delta$  for  $0.12 < Pm < 8$  and  $200 < Re < 6400$  ( $\delta$  being in the range 0.25 to 0.5), which is not correlated to the linear growth rate. This result is quite critical to accretion disk transport theory, as the magnetic Prandtl number  $Pm$  is expected to vary by many orders of magnitude between the various classes of disks, from  $Pm \ll 1$  in YSO disks to  $Pm \gg 1$  in AGN disks. More generally, these results stress the need to control dissipation processes in astrophysical simulations.

## 1 INTRODUCTION

Angular momentum transport has always been a central issue in accretion disk theory. The first  $\alpha$  model (Shakura & Sunyaev 1973) already assumed the presence of strong turbulent motions, modelled through an effective viscosity, orders of magnitude larger than the expected disk molecular viscosity. Since then, the physical origin of this turbulence has been highly debated. As purely hydrodynamic non stratified Keplerian flows are known to be linearly stable to small perturbations, a finite amplitude instability was first envisioned to trigger turbulence. This question was studied both experimentally (Richard & Zahn 1999; Richard 2001; Richard et al. 2001) and numerically (Balbus et al. 1996; Hawley et al. 1999), leading to a long controversy. More recent numerical and experimental investigations of this problem strongly support the idea that the transport due to this mechanism, if present, would be far too inefficient to account for the short disk evolution time-scales imposed by astrophysical observations (Lesur & Longaretti 2005; Ji et al. 2006). Linear instabilities of hydrodynamic origin have also been envisioned as a source of turbulence, relating in particular to the flow stratification (Klahr & Bodenheimer 2003; Urpin 2003; Dubrulle et al. 2005; Shalybkov & Ruediger 2005), but these are either not present or too inefficient

(Johnson & Gammie 2006; Arlt & Urpin 2004; Longaretti & Lesur 2007; see Lesur & Longaretti 2005 and references therein for a recent review of this issue).

The potential role of MHD instabilities in accretion disks was pointed out in a seminal paper by Balbus & Hawley (1991), devoted to an analysis of what is now known as the magneto-rotational instability (MRI). This instability has been extensively studied since then, mainly with the help of local (Hawley et al. 1995; Stone et al. 1996) and global (Hawley 2000) 3D numerical simulations. Although a more recent set of numerical simulations did focus on MRI energetics (Gardiner & Stone 2005), the dissipation of turbulent fields in these simulations is not controlled, as no physical term was introduced to account for physical viscosity and resistivity. Note however that Brandenburg et al. (1995) have introduced such dissipation in their simulations, but kept it as small as possible, leading to simulations dominated by artificial and numerical dissipations. The resistive term alone has also been introduced by Fleming et al. (2000), but viscous effects were still neglected. This raises questions about the exact role of numerical dissipation in all these simulations, especially at the light of our recent investigation of subcritical turbulence in accretion disks (Lesur & Longaretti 2005), which clearly showed that a careful con-

## 2 Lesur, G. and P-Y. Longaretti

trol of dissipation and resolution — and more generally of the dimensionless parameters of the problem — is required to properly quantify turbulent transport.

This issue is addressed here in the context of MRI-driven turbulence, using a 3D spectral Fourier code, which allows a precise monitoring of viscous, resistive and numerical dissipation. First, we recall the MHD equations in the shearing sheet framework (Hawley et al. 1995), along with the relevant dimensionless parameters of the problem, and summarize what is known about their effect on MRI-induced turbulent transport. Next, we investigate the linear stability of the MRI, which to the best of our knowledge has not been characterized when both viscosity and resistivity are accounted for in the dispersion relation. Then, we present new results on the behavior of turbulent transport in dimensionless parameters regime that have not been investigated in the past: first, very close to the threshold of instability (in terms of relative magnetic field strength), and then with respect to the magnetic Prandtl number, which has been ignored in all previous investigations. The dependence of turbulence transport on the magnetic Prandtl number is the most significant finding of this investigation. This dependence may turn out to be critical, as the magnetic Prandtl number varies by many order of magnitudes in astrophysical disks. The astrophysical implications of our findings are further discussed in our concluding section, and potential caveats relating to numerical limitations that may influence our results.

## 2 SHEARING BOX CHARACTERIZATION AND SUMMARY OF EARLIER RESULTS

The MRI has already been extensively studied in the literature (see, e.g., Balbus 2003 and references therein for a review of the subject). Our objective is to extend previous work through a systematic exploration of the dependence of the MRI-induced transport on the physical quantities characterizing the problem. For simplicity, we work in a shearing sheet setting (see Hawley et al. 1995 for a description of the shearing box equations, numerical boundary conditions, and conserved quantities); vertical stratification is ignored, but both viscous and resistive microphysical (molecular) dissipation are included. This differs from previous investigations, where this is always ignored. Our previous experience with subcritical hydrodynamic transport has shown us that the inclusion of explicit dissipation is required to precisely characterize transport properties and distinguishing resolved simulations from unresolved ones (see Lesur & Longaretti 2005 for an extensive discussion and illustration of these points).

The problem is formulated in a cartesian frame centered at  $r = R_0$ , rotating with the disk at  $\Omega = \Omega(R_0)$  with radial dimension  $H \ll R_0$ . In this work,  $H$  is the size of our simulation boxes, in all spatial dimensions. This leads to the following set of equation, assuming  $\phi \rightarrow x$ ,  $r \rightarrow -y$ :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

$$-2\Omega \times \mathbf{u} - 2\Omega S y \mathbf{e}_y + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

where the medium shear is defined by  $S = -r\partial_r\Omega$ . For simplicity, incompressible motions are assumed. This is a priori justified by the fact that MRI-induced motions are usually subsonic, so that one expects at least in first approximation that compressibility effects do not play a major role in the problem. This approximation allows us to remove the flow Mach number from the list of dimensionless parameters characterizing the problem, so that we can more effectively isolate and quantify the role of the various physical agents.

The terms on the right-hand side member of Eq. (1) are the gas pressure, Lorentz force, Coriolis force, tidal force, and viscous dissipation, respectively. The steady-state solution to this equation is the local profile  $\mathbf{u} = S y \mathbf{e}_x$  with  $S = 3/2\Omega$  for Keplerian disks. In the remainder of this paper, we will use the deviation from the laminar profile  $\mathbf{v}$  defined by  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - S y \mathbf{e}_x$ . For simplicity, we take the steady-state magnetic field  $B_0$  along the vertical axis. Note that this field is also the average field in the shearing sheet box, and is conserved during the evolution thanks to the shearing sheet boundary conditions (Hawley et al. 1995).

These equations are characterized by four dimensionless numbers, the first three relating to the Navier-Stokes equation while the last one belongs to the induction equation:

- The Reynolds number,  $Re \equiv SH^2/\nu$ , measuring the relative importance of nonlinear coupling through the advection term, and viscous dissipation.
- A proxy to the plasma beta parameter, defined here as  $\beta = S^2 H^2 / V_A^2$  where  $V_A^2 = B_0^2 / \mu_0 \rho$  is the Alfvén speed. The rationale of this definition follows from the vertical hydrostatic equilibrium constraint  $c_s \sim \Omega H$ , which is expected to hold in thin disks, so that our definition of  $\beta$  is indeed related to the plasma parameter in an equivalent, vertically stratified disk. This parameter measures the relative weight of the Lorentz force and the advection term.
- The rotation number (inverse Rossby number), defined as  $R_\Omega = 2\Omega/S$ , which measures the relative importance of the Coriolis force.
- The magnetic Reynolds number,  $R_m = SH^2/\eta$ , which measures the relative importance of resistive dissipation with respect to the ideal term in the induction equation.

We consider only Keplerian disks in this investigation, so that the rotation number is held fixed to its Keplerian value  $R_\Omega = -4/3$ . This leaves us with three independent dimensionless numbers:  $\beta$ ,  $Re$ , and  $R_m$ .

On the other hand, the (local in the disk) dimensionless transport coefficient,

$$\alpha = \frac{\langle v_x v_y - B_x B_y / (\mu_0 \rho) \rangle}{S^2 H^2}, \quad (5)$$

being a dimensionless number, can only depend on the local dimensionless parameters characterizing the flow that we have just defined (the bracketing refers to appropriate

### Impact of dimensionless numbers on the efficiency MRI-induced turbulent transport. 3

box and/or time averages)<sup>1</sup>. Our task reduces to characterize this dimensionless transport, as a function of the three independent dimensionless numbers just defined. However, for later convenience, we take them to be  $\beta$ ,  $Re$  and  $Pm \equiv \nu/\eta = Rm/Re$  instead (the rationale of this latter choice will become apparent later on).

All previous investigations ignore the dependence on the last two dimensionless numbers, who have not been included in the physical description up to now. Within such an approximation, Hawley et al. (1995) have characterized the dependence of  $\alpha$  on  $\beta$ . Their results imply that

$$\alpha \simeq 3\beta^{-1/2}, \quad (6)$$

from their Eqs. (10), (15), (16) and (18).

This implies in particular that  $\alpha$  increases when the initial (and box average) magnetic field  $B_o$  is increased. However, for a large enough field, the smallest unstable wavelength (which increases along with  $B_o$ ) becomes larger than the box size, and the instability is quenched. On this basis, one expects that the scaling Eq. (6) would break down close enough to the critical  $\beta$  stability limit. This question is somewhat investigated in the present work. However, most of our effort is devoted to characterizing the  $Re$  and  $Pm$  dependence of  $\alpha$ .

### 3 LINEAR STABILITY ANALYSIS

The linear stability of differentially rotating disks in presence of a magnetic field was first investigated in the astrophysical context by Balbus & Hawley (1991). Then, the instability in the weakly ionized case has been considered (Blaes & Balbus 1994; Wardle 1999; Balbus & Terquem 2001), leading to the well known Dead Zone problem (Gammie 1996). However, we are not aware of any clear indication of the stability limits of the fluid when both viscous and resistive dissipation are present in the general astrophysical context. Some discussions have been done on this point in the literature, mostly motivated by liquid-metal experiments, in the limit  $Pm \ll 1$  (Ji et al. 2001; Rüdiger & Shalybkov 2002). However, these papers exhibit no clear asymptotical limit that may be applied for astrophysical disks. Therefore, we provide such an analysis here, as a prelude to our non-linear simulations.

We will consider only axisymmetric perturbations, so that we can eliminate the azimuthal perturbation transport term. Note that this assumption does not seem to have a great influence on the stability limit, since 3D numerical simulations and linear analysis of axisymmetric modes exhibit nearly the same stability limit; this holds in particular in the simulations presented here. The new physics introduced by these equations is the  $\nu$  and  $\eta$  coefficient, which are respectively the kinematic viscosity and resistivity.

We linearize and Fourier transform the equations of motion by assuming  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \exp(i(\omega t - k_y y - k_z z))$  and  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 \exp(i(\omega t - k_y y - k_z z))$ . This yields the following linearized equation set:

$$(i\omega + \nu k^2) \mathbf{v}_0 = i \mathbf{k} \psi - i k_z \frac{B_0}{\mu_0 \rho_0} \mathbf{b}_0 + (2\Omega - S) v_y \mathbf{e}_x - 2\Omega v_x \mathbf{e}_y, \quad (7)$$

$$(i\omega + \eta k^2) \mathbf{b}_0 = -i k_z B_0 \mathbf{v} + b_y S \mathbf{e}_x, \quad (8)$$

$$i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (9)$$

$$i \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (10)$$

where  $\psi$  is the perturbation in total pressure  $(P + B^2/\mu_0)/\rho$ . Introducing  $\omega_\nu \equiv \omega - i\nu k^2$  and  $\omega_\eta \equiv \omega - i\eta k^2$ , the Alfvén speed  $V_A^2 = B_0^2/\mu_0 \rho$ , the epicyclic frequency  $\kappa^2 = 2\Omega(2\Omega - S)$  and  $\gamma^2 = k_z^2/k^2$ , one eventually gets the dispersion relation:

$$(\omega_\nu \omega_\eta - k_z^2 V_A^2) \left( \omega_\nu^2 \omega_\eta^2 - 2\omega_\nu \omega_\eta k_z^2 V_A^2 - \omega_\eta^2 \kappa^2 \gamma^2 - k_z^2 V_A^2 (2\Omega S \gamma^2 - k_z^2 V_A^2) \right) = 0. \quad (11)$$

which we now solve in various dissipation regimes.

#### 3.1 $Pm = 1$ behavior

Let us first look at the  $Pm = 1$  case, where the dispersion equation can be solved exactly by analytical means. The condition  $\Im(\omega) < 0$  expresses the existence of the instability. From this condition, the MRI exists if and only if  $\nu^2 k^4 < -\omega_\nu^2$ . From this constraint and the dispersion relation Eq. (11), one find that:

$$\nu^2 < \frac{\sqrt{\kappa^4 \gamma^4 + 16 k_z^2 V_A^2 \Omega^2 \gamma^2}}{2k^4} - \frac{k_z^2 V_A^2}{k^4} - \frac{\kappa^2 \gamma^2}{2k^4}, \quad (12)$$

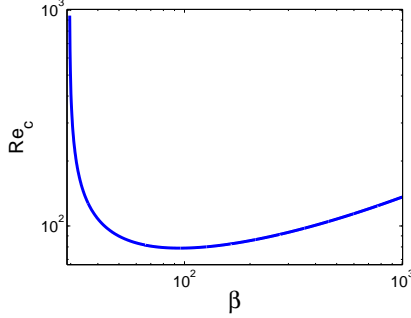
is a necessary and sufficient criterion for instability. One can check that the highest  $\nu$  values obtain when  $\gamma = 1$  and  $k_z = \min(k_z) = 2\pi/H$ , which corresponds to the so-called channel flow solution in the  $z$  direction. From our definition of the Reynolds number as  $Re = SH^2/\nu$  where  $H$  is the numerical box height or the typical disk height, and of the plasma parameter  $\beta = S^2 H^2/V_A^2$ , the stability limit Eq. (12) translates into a relation between these two parameters, represented on Fig. 1.

Note that the instability has two different limits, depending on the  $\beta$  parameter:

- A high  $\beta$  regime, corresponding to a low magnetic pressure. In this regime, marginal stability occurs at a characteristic Reynolds number value  $Re_c \simeq 80$ . This behavior illustrates that the growth time scale of the most unstable mode must be shorter than the dissipation time scale, defined by  $\tau_d \simeq k^2/\nu$ .
- A low  $\beta$  regime, which is nearly Reynolds independent. In this region, one can define a critical  $\beta$  ( $\beta_c = 29.5$ ) for which the MRI is lost. This behavior can be explained by considering the unstable mode of shortest wavelength: as  $\beta$  goes to smaller values, the smallest unstable wavelength increases (see Eq. 12). At some point it becomes larger than the scale height  $H$  (or box size in our case) and the instability is lost. Since this phenomenon takes place at large scale, the Reynolds number has naturally no role to play in it. Note that this regime is not specific to our unstratified

<sup>1</sup> It may also depend on the simulation aspect ratio and resolution, from a numerical point of view.

4 *Lesur, G. and P-Y. Longaretti*



**Figure 1.** MRI linear stability limit

calculation, since similar results are found for a stratified medium where marginal stability usually occurs for  $\beta_c \gtrsim 1$  (see e.g. Balbus & Hawley 1991 and Gammie & Balbus 1994). This limit is reached when the last factor in Eq. (11) cancels out, i.e., when  $2\Omega S = V_A^2 k_z^2$  (the usual dissipationless MRI stability limit).

### 3.2 $Pm \neq 1$ behavior

The dispersion relation can no longer be solved exactly in this case, but an approximate solution can be found in the low magnetic field limit ( $V_A \rightarrow 0$ , or more precisely  $V_A k_z \ll \kappa$ ), where marginal stability follows from a balance between the destabilizing term, and the dissipation ones. The “opposite” (high  $\beta$ ) marginal stability limit, where destabilization is balanced by the usual Alfvénic magnetic tension, is briefly addressed at the end of this section.

In the limit of vanishing magnetic field, the dispersion relation has two relevant roots  $\omega_\eta^2 = 0$  and  $\omega_\nu^2 = \kappa^2$ . In what follows, we refer to these roots as the Alfvénic and the inertial branch, respectively. Looking for the first order correction in  $V_A^2 k_z^2$  to the Alfvénic branch yields the following result, which describes the MRI modes:

$$\omega = i\eta k_z^2 \pm i \left( \frac{2\Omega S}{k_z^4 (\eta - \nu)^2 + \kappa^2} \right)^{1/2} V_A k_z. \quad (13)$$

Note that viscosity and resistivity do not play a symmetric role in this expression. Two interesting limits with respect to the magnitude of the viscosity prove useful to characterize marginal stability. As before, we maximize instability by assuming  $\gamma = 1$  and  $k_z = 2\pi/H$ .

#### 3.2.1 Low viscosity limit:

First consider the limit where  $\nu k_z^2 \ll \kappa$ . In this case, Eq. (13) reduces to  $\eta k^2 = (2\Omega S/\kappa^2) V_A k_z$  (where  $\eta k_z^2 \ll \kappa$  has been self-consistently used), which, using the Lundquist number defined as  $Lu = Rm\beta^{-1/2}$ , can be recast as

$$Lu = \left( \frac{2\pi}{3^{1/2}} \right) \simeq 3.6. \quad (14)$$

Note that our definition of the Lundquist number is not

strictly identical to Turner et al. (2006) but is widely used in the MHD community<sup>2</sup>. In this regime, the  $\omega_\eta^2 \kappa^2$  term balances the  $2\Omega S V_A^2 k_z^2$  term in the dispersion relation Eq. (11). Eq. (14) corresponds to the limit found by Fleming et al. (2000). It is also related to the origin of the “dead zone” in accretion disks (see e.g. Gammie 1996). This marginal stability limit is relevant to disks with low Prandtl numbers ( $Pm \ll 1$ ) and high Reynolds numbers ( $Re \gg 1$ ), such as YSO disks.

Also, for negligible resistivity, growth rates in this regime are given by

$$\tau^{-1} \simeq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\Omega S}{\kappa^2} \right) V_A k_z. \quad (15)$$

This result is valid for  $V_A k_z \lesssim \kappa$  due to our expansion scheme; it also gives the correct order of magnitude of maximum growth rates when  $V_A k_z \sim \kappa$ , as shown by the standard dissipationless MRI analysis.

#### 3.2.2 High viscosity limit:

Conversely, consider the large viscosity limit, where  $\nu k_z^2 \gg \kappa$ . The corresponding relations in this limit are

$$ReRm = \frac{3^{1/2}}{2} (2\pi)^3 \beta^{1/2} \simeq 215 \beta^{1/2}. \quad (16)$$

and

$$\tau^{-1} \simeq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\Omega S}{\nu k_z^2} \right) V_A k_z. \quad (17)$$

In this regime, the  $\omega_\nu^2 \omega_\eta^2$  term balances the  $2\Omega S V_A^2 k_z^2$  term in the dispersion relation Eq. (11). The growth rates relevant here are much smaller than in the small viscosity limit, Eq. (15). In fact, Eq. (13) indicates that this is the case as soon as  $\nu k_z^2 \lesssim \kappa$ , or equivalently, for the largest mode, when

$$Re \gtrsim 3(2\pi)^2/2 \simeq 60. \quad (18)$$

This limit divides the low and high viscosity regime.

The marginal stability limit Eq.(16) obtains for large Prandtl and small Reynolds numbers. In the large Prandtl ( $Pm \gg 1$ ) and large Reynolds number limit ( $Re \gg 1$ ) expected in AGN disks, the growth rates of Eq. (15), or more generally of dissipationless MRI, are recovered. As before, these growth rates are expected to be valid (in order of magnitude) for  $V_A k_z \lesssim \kappa$  due to our expansion scheme.

Note finally that a similar analysis can be performed for the inertial modes, but is not very informative; the damping of these modes is dominated by viscous dissipation, as these are mostly driven by the epicyclic motion.

<sup>2</sup> The difference lies in the fact that our calculation is made in the limit of high  $\beta$ , leading to a linear growth rate controlled by  $V_A$  instead of  $\Omega$



*Impact of dimensionless numbers on the efficiency MRI-induced turbulent transport.* 5

### 3.2.3 High $\beta$ limit:

Although we did not investigate this case in much detail, it is apparent from Eq. (11) that when  $2\Omega S = V_A^2 k_z^2$  [cancellation of the last term in Eq. (11)],  $\omega_\eta = 0$  is one of the solutions to the dispersion relation. At the light of our preceding analyzes, and because this equality embodies the MRI stability limit in the ideal case, as recalled above, it is apparent that this relation is the relevant limit in a small dissipation context as well, generalizing the result found for  $Pm = 1$ .

### 3.2.4 Heuristic explanation:

To explain the behavior brought to light in Eqs. (14) and (16), it is useful to recall the physical origin of the instability, as discussed, e.g., in Balbus & Hawley (2003), in the dissipation-free limit; the process is sketched on see Fig. 2, for convenience. Assume for definiteness that one starts by distorting the equilibrium velocity field in the radial direction with a sinusoidal perturbation in the vertical direction:  $v_y = v_{y0} \exp(-ikz)$ . The magnetic field being frozen in the fluid will also develop a radial component [first term in the right-hand side member of the linearized induction equation, Eq. (8)]; the shear will then transform this radial field in an azimuthal one [second term in the right-hand side member of the linearized induction equation, Eq. (8)]. The resulting tension force produces a momentum transfer between fluid particles that have been moved according to the imposed velocity perturbation [second term in the right-hand side member of the linearized motion equation, Eq. (8)]. This force is destabilizing if the angular velocity decreases with radius: indeed in this case, the inner particle, moving faster than the outer one, will transfer orbital momentum to the outer one, thereby reinforcing its inward motion, an effect mediated by the Coriolis force when seen in the rotating frame. In this description, marginal stability follows when the driving mechanism is balanced by the usual tension restoring force (the piece not connected to the generation of magnetic field from the mean shear).

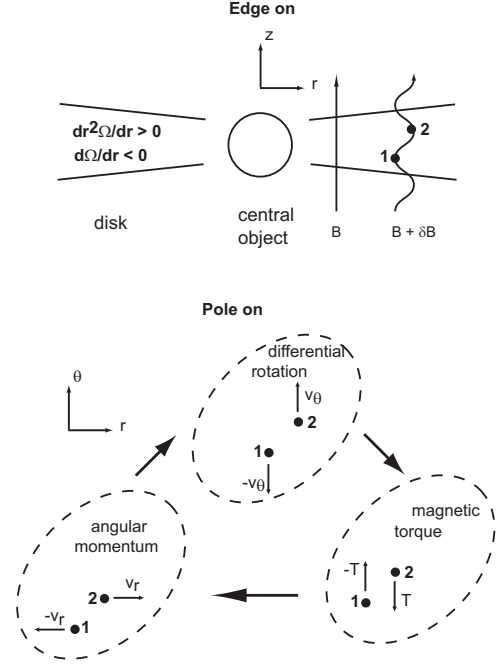
What does dissipation change to this picture? For definiteness, let us focus on marginal stability and let us consider only resistive dissipation for the time being (“large” viscosity limit). In this limit, the magnitude of the velocity and magnetic fields in the various steps of the instability mechanism described above are controlled by dissipation processes so that one may again go through the preceding process step by step, assuming equilibrium at each step. The magnitude of the radial magnetic field in this context results from the balance between the motion driving and field dissipation:

$$-ikB_0 v_y = \eta k^2 b_y, \quad (19)$$

while the shearing generation of the azimuthal field from the radial one is also balanced by resistive dissipation:

$$Sb_y = \eta k^2 b_x. \quad (20)$$

Both relations follow from the induction equation in the marginal stability limit, except for the term dropped in Eq. (20), which leads to the usual magnetic tension sta-



**Figure 2.** Sketch of the MRI mechanism (see text).

bilization and is of no interest in the limit considered here. The azimuthal force balance then requires that

$$(2\Omega - S)v_y = -i \frac{kB_0}{\mu_0 \rho_0} b_y, \quad (21)$$

i.e.,  $\omega_\eta^2 \kappa^2 = 2\Omega S V_A^2 k^2$ , once the two preceding constraints are taken into account (inclusion of  $\omega$  in this line of argument does not change the result). As noted earlier, this relation directly leads to Eq. (14).

If one assumes instead that viscous dissipation exceeds the Coriolis force in magnitude, then the magnetic tension due to the generation of azimuthal field from the radial one by the shear should be balanced by viscous dissipation instead of the Coriolis force in the two horizontal components of the momentum equation, leading alternatively to  $\omega_\eta^2 \omega_\nu^2 = 2\Omega S V_A^2 k^2$ , i.e. to Eq. (16).

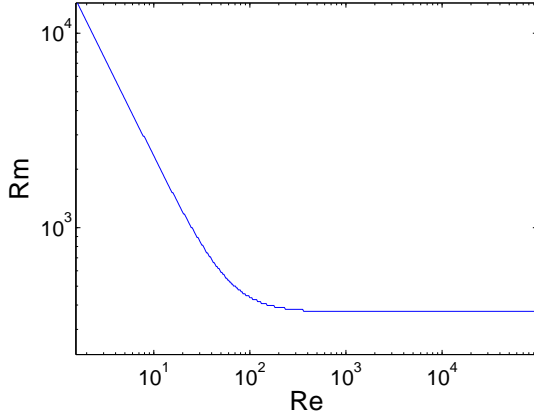
This also relates to the structure of MRI modes. In the limit of a very small magnetic tension restoring force, the Alfvénic branch is made of  $b_y$  dominated modes. The other components of the magnetic field and the velocity field are of the order of  $V_A k$  compared to  $b_y$ . Therefore, the growth rate is at first controlled by the dissipation rate of  $b_y$ , which is related to the resistivity [first term of the right hand side of Eq. 13]. The interaction of the other fields, which leads to the MRI, is controlled by a term symmetric in  $\nu$  and  $\eta$  [second term of Eq. 13].

### 3.2.5 Generic behavior:

A more complete view of the stability limits and growth rates implied by Eq. (11) may be obtained from exact numerical solutions for  $Pm \neq 1$ . Expressing this dispersion



6 *Lesur, G. and P-Y. Longaretti*



**Figure 3.** MRI linear stability limit in the  $Pm \neq 1$  case for  $\beta = 10^4$ .

relation in terms of  $\omega$  leads to the condition:

$$\begin{aligned} \omega^4 & - 2ik^2\omega^3(\eta + \nu) - \omega^2(a + k^4(\eta^2 + \nu^2 + 4\eta\nu) + b) \\ & + \omega(2ik^6(\eta\nu^2 + \nu\eta^2) + aik^2(\nu + \eta) + 2ib\eta k^2) \\ & + \nu^2\eta^2k^8 + a\nu\eta k^4 + b\eta^2k^4 - c = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

with

$$a = 2k_z^2 V_A^2 \quad (23)$$

$$b = \kappa^2 \gamma^2 \quad (24)$$

$$c = k_z^2 V_A^2 (2\Omega\gamma^2 S - k_z^2 V_A^2) \quad (25)$$

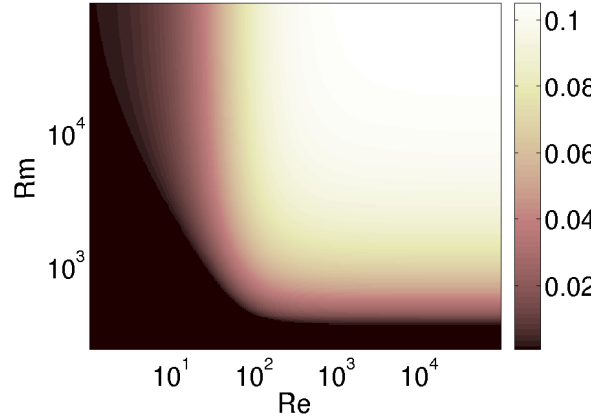
To characterize the stability limits as a function of the Reynolds and the Magnetic Reynolds number ( $Rm = SH^2/\eta$ ), one needs to choose  $\beta$ ,  $\gamma$  and  $k_z$ . As in the  $Pm = 1$  case, we take  $k_z = 2\pi/H$  and  $\gamma = 1$  (which are again expected to maximize the dissipation limits), and solve the relation (22) for  $\beta = 10^4$ . The resulting stability limits are shown on Fig. 3 and the corresponding growth rates on Fig. 4 (arbitrary units). These results match closely the analytical limits just discussed : a high  $Re$  threshold found for  $Rm \sim 371$ , and a low  $Re$  threshold found for  $RmRe \sim 2.3 \times 10^4$ , both in agreement with Eqs. (14) and (16), respectively. Moreover, significantly lowered growth rates are observed when  $Re \ll 60$  to  $80$ , as predicted by Eqs. (17) and (18). A similar behavior follows at much smaller  $\beta$ . For example, the observed scalings are identical, and the preceding asymptotic expressions valid within a factor of 2, down to  $\beta$  values of the order of twice the critical  $\beta$  limit.

These results indicate that most of the stability limit behavior is captured by the approximate relations Eqs. (14) and (16) (as well as by the large field  $\beta$  limit, where relevant), whose physical origin has been discussed above.

### 3.3 Numerics

#### 3.3.1 Equations

Our objective is to simulate the system of Eqs. (1) and (2), with the incompressibility condition Eq. (3), to characterize



**Figure 4.** MRI growth rate (arbitrary unit) as a function of viscous and resistive dissipation for  $\beta = 10^4$ .

the dependence of turbulent transport on the main dimensionless numbers introduced above ( $\beta$ ,  $Re$  and  $Pm$ ). We focus on incompressible motions; indeed, the values of  $\alpha$  found in previous investigations makes us *a priori* expect that compressibility effects will be small. In any case, this allows us to more effectively distinguish the effects of the various physical mechanisms at work in this problem.

First, we simplify the problem from a numerical point of view by distinguishing the mean laminar shear  $\mathbf{u} = Sy\mathbf{e}_x$  from the deviation from this mean  $\mathbf{w}$ . The resulting equations read:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} &= -Sy\partial_x \mathbf{w} - \nabla \psi + \frac{\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})}{\mu_0 \rho_0} \\ &\quad + (2\Omega - S)w_y \mathbf{e}_x - 2\Omega w_x \mathbf{e}_y + \nu \Delta \mathbf{w} \\ \partial_t \mathbf{B} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{B} &= -Sy\partial_x \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{w} + B_y S \mathbf{e}_x + \eta \Delta \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{w} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

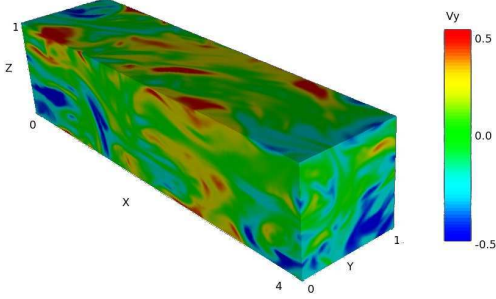
This system is numerically solved using a full 3D spectral code, using the classical shearing sheet boundary conditions (Hawley et al. 1995). This code is now briefly described.

#### 3.3.2 Numerical code

The code used for these simulations is an MHD extension of the HD code used in Lesur & Longaretti (2005), and extensively described there. This code is a full 3D spectral (Fourier) code, based on FFTW libraries, parallelized using the MPI protocol. This kind of code has many advantages for the simulation of incompressible turbulence, such as:

- The incompressibility and solenoid conditions are easily implemented at machine precision, using a projector function in the Fourier space.
- The energy budget is much easier to control, leading to a precise quantification of the energy losses by numerical dissipation.
- Spatial derivatives are very accurate down to the grid scale (equivalent to an infinite order finite difference scheme down to the grid scale).

*Impact of dimensionless numbers on the efficiency MRI-induced turbulent transport.* 7



**Figure 5.**  $w_y$  plot (radial velocity) for  $\beta = 100$ ,  $Re=3200$ ,

The algorithm used is a classical pseudo spectral method which may be described as follows. All the derivatives are computed in Fourier space. However the nonlinear term require special treatment : in Fourier space, a real space product is a convolution, for which the computational time evolves as  $n^2$ , where  $n$  is the number of grid cells. The computation time is minimized if one goes back to real space, compute the needed product and then transforms the result to Fourier space. This procedure (pseudo spectral procedure) is more efficient than a direct convolution product since the FFT computation time scales as  $n \log n$ . However, the finite resolution used in this procedure generates a numerical artifact commonly known as the “aliasing” effect (apparition of non physical waves near the Nyquist Frequency). This effect may be handled through a dealiasing procedure, in which the nonlinear terms are computed with a resolution  $3/2$  higher than the effective resolution used in the source terms (e.g., Peyret 2002).

Comparing our spectral code with a ZEUS-type finite difference code (Stone & Norman 1992), similar results are obtained with a finite difference resolution two to three times higher than the spectral resolution. However, FFTs calculations are more computationally expensive than finite differences, leading to a final computational time equivalent for both kind of code with the same “effective” resolution.

All the simulations presented in this paper were performed with an  $xyz$  resolution of  $128 \times 64 \times 64$  with an aspect ratio of  $4 \times 1 \times 1$ ,  $x$  being the azimuthal direction,  $y$  the radial direction and  $z$  vertical direction. One may change the physical viscosity and resistivity as well as the magnetic field intensity ( $\beta$ ). The mean magnetic field (conserved in the simulations due to the adopted boundary conditions) is aligned in the  $z$  direction. White noise initial perturbations with respect to the laminar flow are introduced as initial conditions on all variables. With  $\beta = 100$ ,  $Pm = 1$  and  $Re = 3200$  one typically generates flow snapshots as shown on Fig. 5 after relaxation of transients; this flow is quite characteristic of a fully developed 3D turbulent field <sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Movies of some of the simulations presented in this paper may be found on the web at <http://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/public/glesur/index.htm>

### 3.4 MRI behavior near the instability threshold

The MRI is a weak magnetic field instability, which should be quenched for  $\beta \simeq 1$  in astrophysical disks. Since the MRI is assumed to be the source of momentum transport in disks, and as at least some such disks are expected to be close to equipartition if they are to support magnetically driven ejection (Ferreira 1997), one may wonder if this instability is efficient enough in the vicinity of near the strong magnetic field stability threshold. We investigate this question in an unstratified context here (the absence of stratification significantly raises the  $\beta$  stability threshold).

We present two simulations, one made at  $\beta = 100$  and  $Re = 3200$  (run 1) which compares to typical results one can find in the literature, and a simulation made close the  $\beta$  threshold, i.e. for  $\beta = 30$  and  $Re = 3200$  on figs (6) and (7). One immediately notes a strong difference between these two simulation. On run 1, we find a classical MRI behavior, as studied by Hawley et al. (1995), characterised by  $\alpha \sim 10^{-1}$  and random variations in all the statistical quantities. However, run 2 exhibits strong exponential growth (“bursts”) for about 100 shear times ( $\sim 10$  orbits), and a sudden drop of fluctuation amplitudes. This behavior is explained as follows : for such low  $\beta$  only the largest wavelength mode is unstable (and not smaller scales), which is then allowed to grow for many shear times, as this mode is an exact nonlinear solution to the incompressible equations of motions (Goodman & Xu 1994). We therefore observe the growth of the channel flow as seen by Hawley & Balbus (1992). However, as this channel solution reaches large amplitude, secondary instabilities such as the Kelvin-Helmoltz instability quickly destroys this channel flow solution once they are triggered, and a new cycle starts (see Goodman & Xu (1994) for a detailed description of these secondary instabilities).

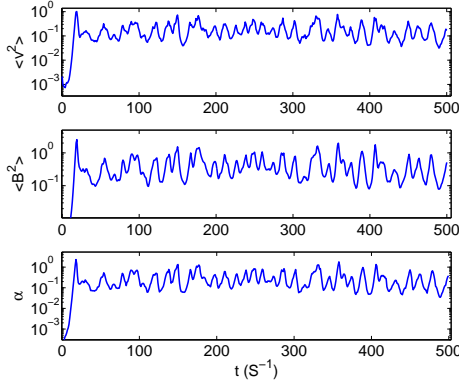
Note that this kind of explanation may also apply to the low Reynolds threshold, since there the smallest scales are viscously damped and only the largest ones remain unstable. Indeed, we did observe this behavior close the low Reynolds threshold, as did Fleming et al. (2000) but in an indirect way (see Figs. 2 and 4 of their paper), and one can conclude that these bursts are characteristic of a marginally unstable MRI. Such bursts may be astrophysically relevant. Indeed, one may question the MRI behavior close to the dead zone (Gammie 1996), in which the magnetic Reynolds number is assumed to be low enough to damp the instability. If these bursts exist in real disks, they may quickly destroy this dead zone under the effects of the strong turbulent motions observed in our simulations.

Let us have a closer look on these bursts with the help of correlation lengths defined as

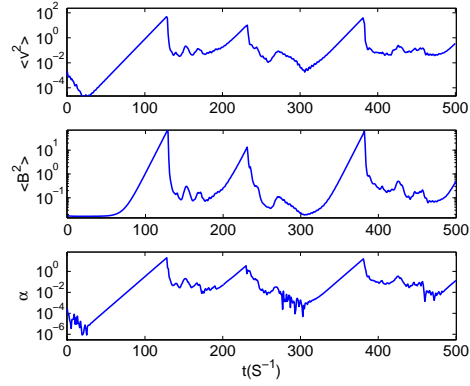
$$L_i = \frac{\int dy_i \int f(x_i) f(x_i - y_i) dx_i}{\int f^2(x_i) dx_i} \quad (26)$$

where  $i = 1, 2, 3$  is the direction of the correlation and  $f$  refers either to the velocity or magnetic field. Note that with this definition, the correlation length vanishes for a pure sinusoidal signal; therefore, these correlation lengths provide us with a convenient tool to follow the presence of the channel flow solution in our simulations. We show on fig. 8 and fig. 9 the evolution of the correlation length in the  $y$  and  $z$  direction for the  $w_x$  field (a similar behavior is obtained

8 *Lesur, G. and P-Y. Longaretti*



**Figure 6.**  $\beta = 100$ ,  $\text{Re}=3200$  run



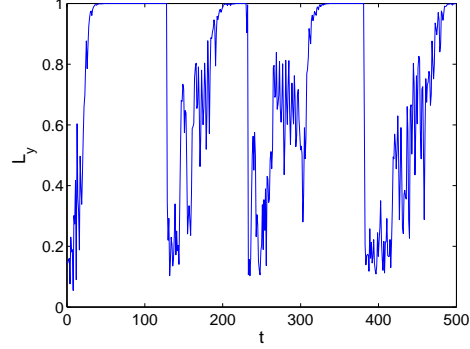
**Figure 7.**  $\beta = 30$ ,  $\text{Re}=3200$  run

with the other field components). The behavior of correlation lengths closely follows what can be seen by monitoring the energy in the deviations from the laminar flow (fig. 7), and indicate the presence of two main regimes in this simulation. The first regime corresponds to an exponential growth (“burst”) of the channel flow, for which  $L_y$  is found to be equal to the box size and  $L_z = 0$  (a careful examination shows that  $L_z$  is exponentially decaying down to  $10^{-10}$ ), indicating the presence of a purely sinusoidal mode in the  $z$  direction in the burst stage. The second regime is a more classical state for 3D turbulent motion, with  $L_y \simeq 0.5$  and  $L_z \simeq 0.4$ . Note that  $L_y$  grows on very short time-scales, leading eventually to a new burst stage.

These correlation lengths also disclose some numerical artifacts present in the first regime. First, the correlation length in the  $y$  direction is artificially limited to  $L_y = 1$  as a consequence of the shearing sheet boundary conditions in a finite box size. In a real disk, one would expect a loss of correlation in the radial direction on a scale of the order of a few scale heights: indeed, the typical frequency involved in these phenomena is of the order of the Keplerian frequency and a signal can’t propagate faster than the sound speed, leading to a maximum correlation length of a few scale heights.

Similarly, the vanishingly small vertical correlation length for the channel flow solution is also an artifact of the adopted boundary conditions. A more realistic result would follow if one were to take into account the vertical stratification and set the boundary conditions far from the disk midplane. More generally, our results are probably not directly applicable to a real disk, but they shed some light on what the generic behavior of the MRI would look like near various stability thresholds, even though different aspect ratio and boundary conditions should be investigating before firm conclusions can be drawn.

Finally, the behavior exemplified in our simulations suggests that assuming  $\alpha$  constant would poorly represent the transport behavior close enough to the marginal stability limit. Time-dependent transport models are needed in such a context. Real disks may not operate close to the strong field limit unless some (unknown) back-reaction loop is at work, or unless (more realistically) the magnetic field varies in a systematic way with radius throughout the disk; con-



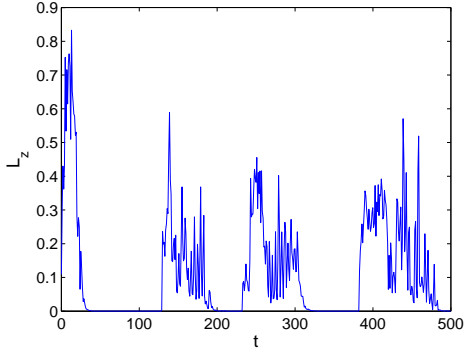
**Figure 8.** Correlation length of  $w_x$  in the  $y$  direction as a function of time,  $\beta = 30$ .

sequently, the bursting behavior observed here may imply a similar ejection variability in the relevant regions of jet-driving disks. Note however, that our “mean” equivalent  $\alpha$  is rather large ( $\alpha \simeq 5$ ), leading to question of the role of the ignored fluid compressibility in these cases; it is quite possible that coupling to compressible modes may effectively limit the magnitude of the bursts.

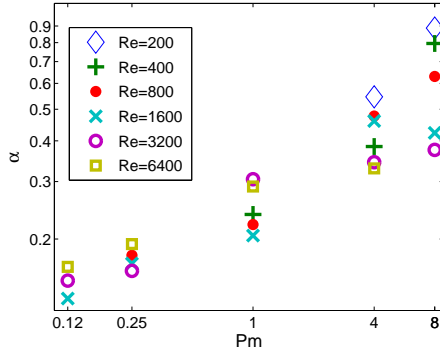
### 3.5 Magnetic Prandtl effect on transport coefficients

All previously published simulations were performed without exerting numerical control on the dissipation scales and dissipation processes. However, small scales have an impact on large scales processes, and therefore on transport efficiency. In this section, the role of the Reynolds and Prandtl numbers defined in section 3 is examined. In particular, the Prandtl number allows us to change the ratio of the viscous and resistive dissipation scales. Unfortunately, deviations from  $Pm = 1$  are quite demanding numerically, since one wants to resolve both the velocity and magnetic dissipation scales. We present on Fig. 10 the result of such simulations: we plot the mean transport coefficient ( $\alpha$ ) as a function of the Prandtl number, for various Reynolds num-

## Impact of dimensionless numbers on the efficiency MRI-induced turbulent transport. 9



**Figure 9.** Correlation length of  $w_x$  in the  $z$  direction as a function of time,  $\beta = 30$ .



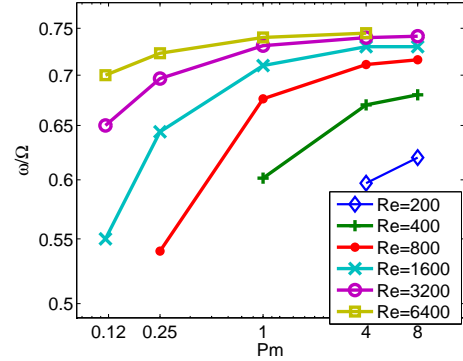
**Figure 10.** Prandtl effect for  $\beta = 100$

bers (the Reynolds number quantifies the viscous dissipation scale). Statistical averages are computed over 500 shear times, and start after the first 100 shear times to avoid pollution by relaxation of the initial transient dynamics. From these plots, one finds a significant correlation between the Prandtl number and the transport coefficient, leading to

$$\alpha \propto Pm^\delta \quad \text{for} \quad \begin{cases} 0.12 < Pm < 8 \\ 200 < Re < 6400 \end{cases}, \quad (27)$$

with  $\delta$  in the range 0.25 — 0.5. Note that this result shows that the transport coefficient depends on  $Re$  and  $Rm$  via  $Pm$ , at least in the  $Pm$  range considered in this paper. This may be seen on Fig. 10 as a small vertical dispersion (variation of both  $Re$  and  $Rm$  at constant  $Pm$ ) compared to the effect of a single  $Pm$  change. Although this section is the briefest of the paper, this result constitutes the most important finding of this investigation (and the most computationally intensive one!).

Note that the numerical results obtained at very high Reynolds number and high Prandtl number are poorly resolved, mainly because of a very short magnetic dissipation scale. This remark may explain that the two points at  $Pm = 8$  lie somewhat below the mean of the other results. Our preliminary tests at higher resolution seem to show that



**Figure 11.** Linear growth rate of the largest mode for various  $(Re, Pm)$  at  $\beta = 100$

a higher transport obtains at higher resolution at  $Pm = 8$  and  $Re = 6400$ , which confirms a limit due to resolution in these high  $Pm$  runs. This behavior is easily understood, since the finite numerical resolution enforces a numerical dissipation scale (roughly equal to the grid scale), which is obviously the same for the magnetic and velocity fields. Therefore, at high  $Pm$ , the effective magnetic dissipation scale is forced to be larger than the expected one, leading to an altered spectral distribution and a smaller “numerical Prandtl”.

One may wonder if this effect may be correlated to the linear growth rate studied before. Indeed, we plot the linear growth rate of the largest mode for the different simulations used for this study on Fig. 11. Note that one gets similar plots replacing the largest mode growth rate by the maximum growth rate. Although the idea of a transport efficiency controlled by the linear growth rate is widely spread in the Astrophysical community, this plot shows us that, at least for this example, the linear growth rate doesn’t explain the transport behaviour observed on Fig. 10. Moreover, it appears that, as one may suspect from equation (13), the growth rate is not controlled only by  $Pm$ , but also by some complicated combination of  $Re$  and  $Rm$ . Umurhan et al. (2007) tries to get this kind of  $\alpha - Pm$  correlation analytically, using a weakly non linear analysis of the channel flow. This study leads to a stronger  $\alpha - Pm$  correlation with  $\delta = 1$  in the limit  $Pm \ll 1$ , which appears to be quite different from our full 3D numerical results. Therefore, one needs to find some full nonlinear theory to explain the transport dependance on  $Pm$ .

The correlation observed indicates the existence of a back-reaction of the small magnetic field scales on the large ones (at least for the range of Reynolds and Prandtl numbers explored here), which enhances the transport on large scales. Note that this effect is expected to saturate at some  $Pm$ , since in the limit  $Pm \rightarrow 0$  with  $Re \rightarrow \infty$  and  $Rm$  kept constant, equation (27) predict a null transport despite of the existence of the linear instability. Therefore, the exact implications of these findings remain to be understood, but may potentially be quite important since the Prandtl number varies by many orders of magnitude in astrophysical objects. For example, Brandenburg & Subramanian (2005)

10 *Lesur, G. and P-Y. Longaretti*

suggest that values as small as  $Pm \sim 10^{-8}$  might be found in young stellar objects, while  $Pm \sim 10^4$  would be more typical of AGN disks. Such a wide span is of course out of reach of present day computers.

Finally, this kind of back-reaction points out the potential role of small scale physics (dissipation scales) on the properties of turbulence at the largest available scales (disk height scale). This argues for a careful treatment of the role of dissipation and reconnection processes on the turbulence transport characterization.

## 4 DISCUSSION

In this paper, we have investigated the role of local dimensionless numbers on the efficiency of the dimensionless turbulent transport. To this effect, we have first generalized the previously published linear stability limits, to account for the presence of both viscous and resistive dissipation. Namely, we have confirmed in all cases that the large field marginal stability limit is characterized by a constant plasma  $\beta$  parameter, of order 30 in the shearing sheet unstratified context (but more likely of order unity in real, stratified disks). When marginal stability follows from dissipation and not magnetic tension stabilization, we have found that the marginal stability limit is captured by two asymptotic regime: a large Reynolds ( $Re$ ), small magnetic Reynolds one ( $Rm$ ), with a marginal stability limit  $Rm \sim \beta^{1/2}$ , and a small Reynolds, large magnetic Reynolds number one, where  $ReRm \sim 10^2 \beta^{1/2}$ . A phenomenological explanation has been provided for this behavior.

In the previous section, we investigated the behavior of the MRI near the low  $\beta$  instability threshold; in our simulations,  $\beta = 30$ , a value representative of the large field threshold in our simulation box. In vertically stratified disks, this threshold obtains for much smaller values, typically  $\beta \sim 1$  (Gammie & Balbus 1994). We found, somewhat surprisingly, that turbulent transport is significantly enhanced through burst events, even surprisingly close to the marginal stability threshold. As pointed out earlier, this behavior is physical and not numerical. The use of periodic boundary conditions (vertical) or semi periodic (radial) boundary conditions may enhance the role of the channel flow solution which is responsibly for this behavior, and a real disk channel flow may break up sooner than observed in our local simulations, leading to smaller burst magnitudes. Moreover,  $\alpha > 1$  leads to supersonic motions and compressible numerical simulations are needed to properly quantify the phenomenon, which may exhibit new secondary compressible instabilities in such a context. All these issues lead to the conclusion that low  $\beta$  MRI would produce weaker bursts and therefore smaller transport coefficient than observed in our simulation. However, there is no physical reason why the turbulence bursts would be suppressed, and we believe that these bursts may be a strong signature of regions of stratified disks where MRI-driven turbulence is driven close to the marginal stability threshold.

The most important new result reported in this paper is a correlation between the transport efficiency, and the magnetic Prandtl number, leading to a higher transport coefficient for larger Prandtl numbers. As in the case of the bursting behavior discussed above, the boundary conditions

used in these simulations play some role in the result. However, the possible biases are less obvious and tests with plane radial walls need to be performed to get a grasp on boundary condition effects. Moreover, one needs to check the correlation at higher resolutions, and if possible higher Prandtl numbers, using different kind of codes to get a better characterization and a physical description of the phenomena involved in this observation.

More specifically, a puzzling fact points towards a potential bias due to the shearing sheet boundary conditions. In non-magnetized shear flows, transport in the subcritical regime, far enough from the marginal stability limit scales like  $1/Rg$  where  $Rg$  is the subcritical transition Reynolds number (Lesur & Longaretti 2005). Closer to the marginal stability limit, and in the supercritical regime (e.g., when the Rayleigh stability criterion is not satisfied), transport is enhanced with respect to this scaling, but one always has  $\alpha < 1/Rc$  where  $Rc$  is the critical Reynolds number of linear instability. However, for MRI-driven turbulence, one has  $\alpha > 1/Rc$ , as can be checked from our results. Close to the marginal stability limit, this enhanced efficiency is related to the existence of the channel flow solution, as discussed above. As each linear mode is a nonlinear solution to the incompressible problem, one may ask whether this enhanced transport, which is observed also far from the marginal stability limit, is not an artifact of the shearing sheet boundary condition, which allows such nonlinear coherent modes to develop. This behavior is not necessarily unphysical or irrelevant to actual disk systems, but this point needs to be checked in the future.

Finally, let us come back to the magnetic Prandtl number behavior. As pointed out earlier, the dependence of the transport efficiency on the magnetic Prandtl number indicates a back-reaction of small scales on large ones. We make here a few comments on this feature. The magnetic Prandtl number is related to the ratio of the viscous  $l_\nu$  and resistive  $l_\eta$  dissipation scales, the exact relation depending on the shape of the turbulent energy spectrum. Generally speaking, the Prandtl number varies monotonically with the ratio  $l_\nu/l_\eta$ , and one expects  $Pm \ll 1$  (resp.  $Pm \gg 1$ ) when  $l_\nu/l_\eta \ll 1$  (resp.  $l_\nu/l_\eta \gg 1$ ). The spectrum of the largest scales tends to be flatter than usual turbulent spectra due to the role of the linear instability, down to the scale where the magnetic tension prevents the instability to occur (most probably, this “instability section” of the spectrum only represents a small part of the overall turbulent spectra of actual disks, because of their enormous Reynolds numbers). Leaving aside these largest scales, for  $Pm \ll 1$ , the spectrum is expected to be Kolmogorovian and anisotropic down to the resistive dissipation scale (Goldreich & Sridhar 1995), while below this scale and down to the viscous scale, the velocity spectrum is the usual Kolmogorov velocity spectrum and the magnetic spectrum drops much faster. On the other hand, for  $Pm \gg 1$ , the spectrum should be Kolmogorovian down to the viscous dissipation scale (Goldreich & Sridhar 1995), while the magnetic spectrum should scale like  $k^{-1}$  below the viscous dissipation scale and down to resistive scale (Cho et al. 2003). It is therefore tempting to see in a difference of accumulation of magnetic energy at small scales the cause of the back-reaction of these scales to the largest ones, which would create the observed magnetic Prandtl number dependence of the turbulent transport efficiency. Neverthe-



*Impact of dimensionless numbers on the efficiency MRI-induced turbulent transport.* 11

less, in both small and large Prandtl number settings, turbulent motions in the inertial range are random in phase, so that one expects that to lowest order, coupling of the turbulent spectrum with the largest MRI unstable scales vanishes. To next order, the steepness of the Kolmogorov spectrum indicates that the strength of the coupling decreases with increasing Reynolds number in the vicinity of the viscous dissipation scale, suggesting that at large enough Reynolds number, the Prandtl dependence should saturate, especially on the large Prandtl number side. Such a saturation was not observed in our simulations, although a weak dependence of our results on the magnitude of the Reynolds number may be detected on Fig. 10; however, such an effect might also arise from resolution requirements, which makes our lower Reynolds number results confined to the larger Prandtl number range. Unfortunately, our results can hardly be improved upon with the present generation of computers, leaving the question of the Reynolds number saturation of the Prandtl number dependence open, as well as the overall difference in transport efficiency between the small and large Prandtl number cases. Resolving this issue is crucial to ascertain the role of the magneto-rotational instability in disk transport.

**ACKNOWLEDGEMENTS**

The simulations presented in this paper has been performed both at IDRIS (French national computational center) and at the SCCI (Grenoble Observatory computational center). The authors acknowledge fruitful discussions on the issues discussed, with Steve Balbus, Sébastien Fromang, Gordon Ogilvie, and John Papaloizou.

**REFERENCES**

- Arlt R., Urpin V., 2004, *A&A*, 426, 755  
 Balbus S. A., 2003, *ARA&A*, 41, 555  
 Balbus S. A., Hawley J. F., 1991, *ApJ*, 376, 214  
 Balbus S. A., Hawley J. F., 2003, in Falgarone E., Passot T., eds, *LNP Vol. 614: Turbulence and Magnetic Fields in Astrophysics Numerical Simulations of MHD Turbulence in Accretion Disks*. pp 329–348  
 Balbus S. A., Hawley J. F., Stone J. M., 1996, *ApJ*, 467, 76  
 Balbus S. A., Terquem C., 2001, *Astrophys. J.*, 552, 235  
 Blaes O. M., Balbus S. A., 1994, *Astrophys. J.*, 421, 163  
 Brandenburg A., Nordlund A., Stein R. F., Torkelsson U., 1995, *ApJ*, 446, 741  
 Brandenburg A., Subramanian K., 2005, *Phys. Rep.*, 417, 1  
 Cho J., Lazarian A., Vishniac E. T., 2003, *ApJ*, 595, 812  
 Dubrulle B., Marié L., Normand C., Richard D., Hersant F., Zahn J.-P., 2005, *A&A*, 429, 1  
 Ferreira J., 1997, *A&A*, 319, 340  
 Fleming T. P., Stone J. M., Hawley J. F., 2000, *ApJ*, 530, 464  
 Gammie C. F., 1996, *ApJ*, 457, 355  
 Gammie C. F., Balbus S. A., 1994, *MNRAS*, 270, 138  
 Gardiner T. A., Stone J. M., 2005, in de Gouveia dal Pino E. M., Lugones G., Lazarian A., eds, *AIP Conf. Proc. 784: Magnetic Fields in the Universe: From Laboratory and Stars to Primordial Structures. Energetics in MRI driven Turbulence*. pp 475–488  
 Goldreich P., Sridhar S., 1995, *ApJ*, 438, 763  
 Goodman J., Xu G., 1994, *ApJ*, 432, 213  
 Hawley J. F., 2000, *ApJ*, 528, 462  
 Hawley J. F., Balbus S. A., 1992, *ApJ*, 400, 595  
 Hawley J. F., Balbus S. A., Winters W. F., 1999, *ApJ*, 518, 394  
 Hawley J. F., Gammie C. F., Balbus S. A., 1995, *ApJ*, 440, 742  
 Ji H., Burin M., Schartman E., Goodman J., 2006, *Nature*, 444, 343  
 Ji H., Goodman J., Kageyama A., 2001, *MNRAS*, 325, L1  
 Johnson B. M., Gammie C. F., 2006, *ApJ*, 636, 63  
 Klahr H. H., Bodenheimer P., 2003, *ApJ*, 582, 869  
 Lesur G., Longaretti P.-Y., 2005, *A&A*, 444, 25  
 Longaretti P.-Y., Lesur G., 2007, In preparation for *A&A*  
 Peyret R., 2002, *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. Springer  
 Richard D., 2001, PhD thesis, Université de Paris VII  
 Richard D., Dauchot O., Zahn J.-P., 2001, in *Proc. of the 12th Couette-Taylor Workshop, Evanston, USA Sub-critical Instabilities of Astrophysical Interest in Couette-Taylor System*  
 Richard D., Zahn J., 1999, *A&A*, 347, 734  
 Rüdiger G., Shalybkov D., 2002, *Phys. Rev. E*, 66, 016307  
 Shakura N. I., Sunyaev R. A., 1973, *A&A*, 24, 337  
 Shalybkov D., Ruediger G., 2005, *A&A*, 438, 411  
 Stone J. M., Hawley J. F., Gammie C. F., Balbus S. A., 1996, *ApJ*, 463, 656  
 Stone J. M., Norman M. L., 1992, *ApJs*, 80, 753  
 Turner N. J., Sano T., Dziourkevitch N., 2006, *astro-ph/0612552*  
 Umurhan O. M., Menou K., Regev O., 2007, *Phys. Rev. Lett.*, 98, 034501  
 Urpin V., 2003, *A&A*, 404, 397  
 Wardle M., 1999, *MNRAS*, 307, 849



# Partie VIII

## Bibliographie





## Bibliographie

- Baily, C. et Comte-Bellot, G. 2003, *Turbulence*, CNRS Editions.
- Balbus, S. A. et Hawley, J. F. 1991a, A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis., *Astrophysical Journal* **376**, 214.
- Balbus, S. A. et Hawley, J. F. 1991b, A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. II - Nonlinear evolution, *Astrophysical Journal* **376**, 223.
- Balbus, S. A. et Hawley, J. F. 1998, Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks, *Reviews of Modern Physics* **70**, 1.
- Balbus, S. A. et Hawley, J. F. 2003, Numerical Simulations of MHD Turbulence in Accretion Disks, dans E. Falgarone et T. Passot (éditeurs), *LNP Vol. 614: Turbulence and Magnetic Fields in Astrophysics*, pp. 329–348.
- Balbus, S. A., Hawley, J. F. et Stone, J. M. 1996, Nonlinear Stability, Hydrodynamical Turbulence, and Transport in Disks, *Astrophysical Journal* **467**, 76.
- Balbus, S. A. et Terquem, C. 2001, Linear Analysis of the Hall Effect in Protostellar Disks, *Astrophys. J.* **552**, 235.
- Bardeen, J. M. et Petterson, J. A. 1975, The Lense-Thirring Effect and Accretion Disks around Kerr Black Holes, *Astrophysical Journal, Letters* **195**, L65+.
- Barranco, J. A. et Marcus, P. S. 2005, Three-dimensional Vortices in Stratified Protoplanetary Disks, *Astrophysical Journal* **623**, 1157.
- Bate, M. R., Bonnell, I. A. et Bromm, V. 2002, The formation of close binary systems by dynamical interactions and orbital decay, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **336**, 705.
- Blaes, O. M. 1987, Stabilization of non-axisymmetric instabilities in a rotating flow by accretion on to a central black hole, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **227**, 975.
- Blaes, O. M. 2004, Course 3: Physics Fundamentals of Luminous Accretion Disks around Black Holes, dans V. Beskin, G. Henri, F. Menard et et al. (éditeurs), *Accretion Discs, Jets and High Energy Phenomena in Astrophysics*, pp. 137–185.
- Blaes, O. M. et Balbus, S. A. 1994, Local shear instabilities in weakly ionized, weakly magnetized disks, *Astrophys. J.* **421**, 163.
- Blandford, R. D. et Payne, D. G. 1982, Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **199**, 883.
- Brandenburg, A. 2003, *Computational aspects of astrophysical MHD and turbulence*, pp. 269–+, *Advances in Nonlinear Dynamics*.
- Brandenburg, A., Nordlund, A., Stein, R. F. et Torkelsson, U. 1995, Dynamo-generated Turbulence and Large-Scale Magnetic Fields in a Keplerian Shear Flow, *ApJ* **446**, 741.
- Brandenburg, A. et Ruediger, G. 2005, The angular momentum transport by the strato-rotational instability in simulated Taylor-Couette flows, *astro-ph/0512409*.

- Brandenburg, A. et Subramanian, K. 2005, Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory, *Phys. Rep.* **417**, 1.
- Cabot, W. 1996, Numerical Simulations of Circumstellar Disk Convection, *Astrophysical Journal* **465**, 874.
- Cabrit, S. 2002, Constraints on accretion-ejection structures in young stars, dans J. Bouvier et J.-P. Zahn (éditeurs), *EAS Publications Series*, vol. 3, pp. 147–182.
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. et Zang, T. A. 1988, *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer.
- Casse, F. et Ferreira, J. 2000, Magnetized accretion-ejection structures. IV. Magnetically-driven jets from resistive, viscous, Keplerian discs, *Astron. & Astrophys.* **353**, 1115.
- Casse, F. et Keppens, R. 2002, Magnetized Accretion-Ejection Structures: 2.5-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Continuous Ideal Jet Launching from Resistive Accretion Disks, *Astrophysical Journal* **581**, 988.
- Cho, J., Lazarian, A. et Vishniac, E. T. 2002, New Regime of Magnetohydrodynamic Turbulence: Cascade below the Viscous Cutoff, *Astrophysical Journal, Letters* **566**, L49.
- Cho, J. et Vishniac, E. T. 2000, The Anisotropy of Magnetohydrodynamic Alfvénic Turbulence, *Astrophysical Journal* **539**, 273.
- Cooley, J. W. et Turkey, J. W. 1965, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math. Comput* **19**, 297.
- Darbyshire, A. G. et Mullin, T. 1995, Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow, *J. Fluid Mech.* **289**, 83.
- Dauchot, O. et Daviaud, F. 1995a, Finite amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow, *Phys. Fluids* **7**, 335.
- Dauchot, O. et Daviaud, F. 1995b, Streamwise vortices in plane Couette flow, *Phys. Fluids* **7**, 901.
- Daviaud, F., Hegseth, J. et Bergé, P. 1992, Subcritical transition to turbulence in plane couette flow, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2511.
- Dubrulle, B., Dauchot, O., Daviaud, F., Longaretti, P.-Y. et al. 2005a, Stability and turbulent transport in Taylor-Couette flow from analysis of experimental data, *Phys. Fluids* **17**, 095103.
- Dubrulle, B., Marié, L., Normand, C., Richard, D. et al. 2005b, An hydrodynamic shear instability in stratified disks, *Astron. & Astrophys.* **429**, 1.
- Evans, C. R. et Hawley, J. F. 1988, Simulation of magnetohydrodynamic flows - A constrained transport method, *Astrophysical Journal* **332**, 659.
- Faisst, H. et Eckhardt, B. 2004, Sensitive dependence on initial conditions in transition to turbulence in pipe flow, *J. Fluid Mech.* **504**, 343.
- Ferreira, J. 1995, *Structures magnétiques d'accrétion-éjection*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier.
- Ferreira, J. 1997, Magnetically-driven jets from Keplerian accretion discs., *Astron. & Astrophys.* **319**, 340.
- Ferreira, J. et Pelletier, G. 1995, Magnetized accretion-ejection structures. III. Stellar and extragalactic jets as weakly dissipative disk outflows., *Astron. & Astrophys.* **295**, 807.

- Fleming, T. et Stone, J. M. 2003, Local Magnetohydrodynamic Models of Layered Accretion Disks, *Astrophysical Journal* **585**, 908.
- Fleming, T. P., Stone, J. M. et Hawley, J. F. 2000, The Effect of Resistivity on the Nonlinear Stage of the Magnetorotational Instability in Accretion Disks, *Astrophysical Journal* **530**, 464.
- Forsythe, G. E. et Wasow, W. 1964, *Finite-difference methods for partial differential equations*, J. Wiley & Sons.
- Freidberg, J. P. 1987, *Ideal Magneto-Hydro-Dynamics*, Plenum Press.
- Fromang, S., Papaloizou, J., Lesur, G. et Heinemann, T. 2007, Zero net flux MHD simulations of the magnetorotational instability in the shearing box. II. The effect of dissipative coefficients, *Soumis à Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* .
- Gammie, C. F. 1996, Layered Accretion in T Tauri Disks, *Astrophysical Journal* **457**, 355.
- Gardiner, T. A. et Stone, J. M. 2005, Energetics in MRI driven Turbulence, dans E. M. de Gouveia dal Pino, G. Lugones et A. Lazarian (éditeurs), *AIP Conf. Proc. 784: Magnetic Fields in the Universe: From Laboratory and Stars to Primordial Structures.*, pp. 475–488.
- Gauss, C. F. 1866, Nachlass: Theoria interpolationis methodo nova tractata, *Werke* **3**, 265.
- Goldreich, P. et Lynden-Bell, D. 1965, II. Spiral arms as sheared gravitational instabilities, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **130**, 125.
- Goldreich, P. et Sridhar, S. 1995, Toward a theory of interstellar turbulence. 2: Strong alfvenic turbulence, *Astrophysical Journal* **438**, 763.
- Goodman, J. et Balbus, S. A. 2001, Stratified disks are locally stable, *astro-ph/0110229* .
- Goodman, J. et Xu, G. 1994, Parasitic instabilities in magnetized, differentially rotating disks, *Astrophysical Journal* **432**, 213.
- Hamilton, J. M., Kim, J. et Waleffe, F. 1995, Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures, *J. Fluid Mech.* **287**, 317.
- Hawley, J. F. 1991, Three-dimensional simulations of black hole tori, *Astrophysical Journal* **381**, 496.
- Hawley, J. F. 2000, Global Magnetohydrodynamical Simulations of Accretion Tori, *Astrophysical Journal* **528**, 462.
- Hawley, J. F., Balbus, S. A. et Winters, W. F. 1999, Local Hydrodynamic Stability of Accretion Disks, *Astrophysical Journal* **518**, 394.
- Hawley, J. F., Gammie, C. F. et Balbus, S. A. 1995, Local Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Accretion Disks, *Astrophysical Journal* **440**, 742.
- Hill, G. W. 1878, Researches in lunar theory, *American Journal of Mathematics* **1**, 5.
- Jackson, J. D. 1975, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons.
- Jaffe, W., Ford, H. C., Ferrarese, L., van den Bosch, F. et al. 1993, A large nuclear accretion disk in the active galaxy NGC4261, *Nature* **364**, 213.
- Ji, H., Burin, M., Scharfman, E. et Goodman, J. 2006, Hydrodynamic turbulence cannot transport angular momentum effectively in astrophysical disks, *Nature* **444**, 343.
- Ji, H., Goodman, J. et Kageyama, A. 2001, Magnetorotational instability in a rotating liquid metal annulus, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **325**, L1.
- Johnson, B. M. et Gammie, C. F. 2005, Linear Theory of Thin, Radially Stratified Disks, *Astrophysical Journal* **626**, 978.

- Johnson, B. M. et Gammie, C. F. 2006, Nonlinear Stability of Thin, Radially Stratified Disks, *Astrophysical Journal* **636**, 63.
- King, A. R., Pringle, J. E. et Livio, M. 2007, Accretion disc viscosity: how big is  $\alpha$ ?, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* pp. 226–+.
- Klahr, H. 2004, The Global Baroclinic Instability in Accretion Disks. II. Local Linear Analysis, *Astrophysical Journal* **606**, 1070.
- Klahr, H. H. et Bodenheimer, P. 2003, Turbulence in Accretion Disks: Vorticity Generation and Angular Momentum Transport via the Global Baroclinic Instability, *Astrophysical Journal* **582**, 869.
- Komminaho, J., Lundbladh, A. et Johansson, A. V. 1996, Very large structures in plane turbulent Couette flow, *J. Fluid Mech.* **320**, 259.
- Kozłowski, M., Wiita, P. J. et Paczyński, B. 1979, Self-gravitating accretion disk models with realistic equations of state and opacities, *Acta Astronomica* **29**, 157.
- Krall, N. A. et Trivelpiece, A. W. 1986, *Principles of plasma physics*, San Francisco press.
- Kuiper, G. P. 1941, On the Interpretation of  $\beta$  Lyrae and Other Close Binaries., *Astrophysical Journal* **93**, 133.
- Kunz, M. W. et Balbus, S. A. 2004, Ambipolar diffusion in the magnetorotational instability, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **348**, 355.
- Landau, L. D. et Lifshitz, E. M. 1959, *Fluid mechanics*, Course of theoretical physics, Oxford: Pergamon Press, 1959.
- Lesieur, M. 1990, *Turbulence in fluids third edition*, Kluwer.
- Lesur, G. 2004, *Etude de la turbulence sous critique dans un écoulement de Couette en rotation*, Mémoire de DEA, Ecole normale supérieure de Lyon.
- Lesur, G. et Longaretti, P.-Y. 2005, On the relevance of subcritical hydrodynamic turbulence to accretion disk transport, *Astron. & Astrophys.* **444**, 25.
- Lin, D. N. C. et Papaloizou, J. C. B. 1996, Theory of Accretion Disks II: Application to Observed Systems, *Annual Review of Astron and Astrophys* **34**, 703.
- Livio, M. 1999, Astrophysical jets : a phenomenological examination of acceleration and collimation., *Phys. Rep.* **311**, 225.
- Longaretti, P.-Y. 2002, On the Phenomenology of Hydrodynamic Shear Turbulence, *Astrophysical Journal* **576**, 587.
- Lynden-Bell, D. 1969, Galactic Nuclei as Collapsed Old Quasars, *Nature* **223**, 690.
- Lynden-Bell, D. et Pringle, J. E. 1974, The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables., *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **168**, 603.
- Marcus, P. S. 1993, Jupiter's Great Red SPOT and other vortices, *Annual Review of Astron and Astrophys* **31**, 523.
- Menou, K., Balbus, S. A. et Spruit, H. C. 2004, Local Axisymmetric Diffusive Stability of Weakly Magnetized, Differentially Rotating, Stratified Fluids, *Astrophysical Journal* **607**, 564.
- Narayan, R., Goldreich, P. et Goodman, J. 1987, Physics of modes in a differentially rotating system - Analysis of the shearing sheet, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **228**, 1.
- Orszag, S. A. et Patterson, G. S. 1972, Numerical Simulation of Three-Dimensional Homogeneous Isotropic Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 2, 76.

- Paczynski, B. 1978, A model of selfgravitating accretion disk with a hot corona, *Acta Astronomica* **28**, 241.
- Papaloizou, J. C. B. et Lin, D. N. C. 1995, Theory Of Accretion Disks I: Angular Momentum Transport Processes, *Annual Review of Astron and Astrophys* **33**, 505.
- Papaloizou, J. C. B. et Pringle, J. E. 1984, The dynamical stability of differentially rotating discs with constant specific angular momentum, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **208**, 721.
- Peyret, R. 2002, *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*, Springer.
- Prendergast, K. H. et Burbidge, G. R. 1968, On the Nature of Some Galactic X-Ray Sources, *Astrophysical Journal, Letters* **151**, L83+.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, T. V. et Flannery, B. P. 2002, *Numerical recipes in C++ : the art of scientific computing*, Cambridge University Press.
- Price, D. J. et Monaghan, J. J. 2004, Smoother particle magnetohydrodynamics : some shocking results, *Astrophysics and Space Science* **292**, 279.
- Pringle, J. E. 1981, Accretion discs in astrophysics, *Annual Review of Astron and Astrophys* **19**, 137.
- Rüdiger, G., Arlt, R. et Shalybkov, D. 2002, Hydrodynamic stability in accretion disks under the combined influence of shear and density stratification, *Astron. & Astrophys.* **391**, 781.
- Richard, D. 2001, *Instabilités Hydrodynamiques dans les Ecoulements en Rotation Différentielle*, Thèse de doctorat, Université de Paris VII.
- Richard, D. et Zahn, J. 1999, Turbulence in differentially rotating flows. What can be learned from the Couette-Taylor experiment, *Astron. & Astrophys.* **347**, 734.
- Rincon, F., Ogilvie, G. I. et Cossu, C. 2007, On self-sustaining processes in Rayleigh-stable rotating plane Couette flows and subcritical transition to turbulence in accretion disks, *Astron. & Astrophys.* **463**, 817.
- Rüdiger, G. et Shalybkov, D. 2002, Stability of axisymmetric Taylor-Couette flow in hydromagnetics, *Phys. Rev. E* **66**, 1, 016307.
- Salmeron, R. 2004, *Magnetorotational instability in protostellar disks*, Thèse de doctorat, University of Sydney.
- Satomura, T. 1981, An Investigation of Shear Instability in a Shallow Water, *J. Meteor. Soc. Japan* **59**, 148.
- Shakura, N. I. et Sunyaev, R. A. 1973, Black holes in binary systems. Observational appearance., *Astron. & Astrophys.* **24**, 337.
- Sod, G. A. 1978, A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, *J. Comp. Phys.* **27**, 1.
- Speziale, C. G. 1991, Analytical methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **23**, 107.
- Spiegel, E. A. et Veronis, G. 1960, On the Boussinesq Approximation for a Compressible Fluid., *Astrophysical Journal* **131**, 442.
- Spitzer, L. 1962, *Physics of fully ionized gases*, Interscience.
- Stone, J. M. et Balbus, S. A. 1996, Angular Momentum Transport in Accretion Disks via Convection, *Astrophysical Journal* **464**, 364.



- Stone, J. M., Hawley, J. F., Gammie, C. F. et Balbus, S. A. 1996, Three-dimensional Magnetohydrodynamical Simulations of Vertically Stratified Accretion Disks, *Astrophysical Journal* **463**, 656.
- Stone, J. M. et Norman, M. L. 1992, ZEUS-2D: A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. I - The hydrodynamic algorithms and tests., *Astrophysical Journal, Supplement* **80**, 753.
- Taylor, G. I. 1936, , *Proc. Roy. Soc. London A* **157**, 546.
- Terebey, S., Shu, F. H. et Cassen, P. 1984, The collapse of the cores of slowly rotating isothermal clouds, *Astrophysical Journal* **286**, 529.
- Tillmark, N. et Alfredsson, P. H. 1996, Experiments on rotating plane Couette flow, dans S. Gavrilakis, L. Machiels et P. A. Monkewitz (éditeurs), *Advances in Turbulence VI.*, pp. 391–394, Kluwer.
- Toro, E. F. 1999, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer.
- Toro, E. F., Millington, R. C. et Nejad, L. A. M. 2001, Toward very high-order Godunov schemes, dans Toro, E. F. (éditeur), *Godunov methods : theory and applications*, pp. 905–938, Kluwer Academic/Plenum Publishers.
- Tritton, D. J. 1992, Stabilization and destabilization of turbulent shear flow in a rotating fluid, *J. Fluid Mech.* **241**, 503.
- Tritton, D. J. et Davies, P. A. 1981, Instabilities in geophysical fluid dynamics, dans *Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence*, pp. 229–270, Springer-Verlag.
- Tscharnuter, W. M. et Winkler, K. H. 1979, A method for computing selfgravitating gas flows with radiation, *Comp. Phys. Comm* **18**, 171.
- Umurhan, O. M. 2006, On the stratorotational instability in the quasi-hydrostatic semigeostrophic limit., *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **365**, 85.
- Umurhan, O. M. et Regev, O. 2004, Hydrodynamic stability of rotationally supported flows: Linear and nonlinear 2D shearing box results, *Astron. & Astrophys.* **427**, 855.
- Von Neumann, J. et Richtmyer, R. D. 1950, A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, *J. Appl. Phys* **21**, 232.
- Waleffe, F. 1997, On a self-sustaining process in shear flows, *Phys. Fluids* **9**, 883.
- Wardle, M. 1999, The Balbus-Hawley instability in weakly ionized discs, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **307**, 849.
- Wendt, G. 1933, , *Ing. Arch.* **4**, 577.
- Wisdom, J. et Tremaine, S. 1988, Local simulations of planetary rings, *Astronomical Journal* **95**, 925.
- Yavneh, I., McWilliams, J. C. et Molemaker, M. J. 2001, Non-Axisymmetric Instability of Centrifugally-Stable Stratified Taylor-Couette Flow, *J. Fluid Mech.* **448**, 1.
- Zanni, C., Ferrari, A., Rosner, R., Bodo, G. *et al.* 2007, MHD simulations of jet acceleration from Keplerian accretion disks: the effects of disk resistivity, *Accepté pour publication dans Astron. & Astrophys.* .





# Instabilités et sources locales de turbulence dans les disques d'accrétion

Geoffroy LESUR

---

## Résumé

Le problème du transport de moment cinétique dans les disques d'accrétion astrophysiques fait l'objet d'un vif débat depuis maintenant une trentaine d'années. On propose ici une étude de ce transport en considérant plusieurs instabilités pouvant conduire à de la turbulence développée dans les disques. La première instabilité proposée est l'instabilité hydrodynamique sous critique de cisaillement. Une étude numérique de cette instabilité nous permet de montrer que, bien que non détectable dans les simulations, le transport obtenu sera très probablement bien trop faible pour expliquer les observations actuelles. Nous étudions ensuite l'instabilité stratorotationnelle et nous montrons par un développement analytique que les contraintes sur les conditions aux limites empêchent la formation de cette instabilité dans un vrai disque. Enfin, nous nous intéressons à l'instabilité magnéto-rotationnelle en présence d'effets non idéaux (viscosité et résistivité magnétique). Nous montrons alors que ces effets non idéaux, bien que faibles a priori, ont un fort impact sur l'efficacité de la turbulence finalement engendrée. Ce dernier point montre le rôle que peut avoir la microphysique dans le processus de saturation, et la nécessité d'avoir une modélisation de ces effets afin d'obtenir un modèle de transport cohérent dans les disques d'accrétion.

*Mots clé* : Disque d'accrétion, méthodes numériques, théorie de la turbulence, MHD

---

## Abstract

Angular momentum transport in accretion disks has been a highly controversial debate for 30 years now. We present here a study of this transport, considering some instabilities that can lead to developed turbulence in disks. The first instability considered is the subcritical hydrodynamic instability. Our numerical study shows that, although not directly observed in simulations, this instability should lead to a very weak turbulent transport, and is probably not relevant to explain disks observations. We then consider the stratorotational instability, and we show using an analytical approach that it requires very specific boundary conditions, which prevent this instability from appearing in disks. Finally, we study the magnetorotational instability, including non ideal MHD effect (resistivity and viscosity). We show numerically that these effects, although small compared to ideal MHD terms, can have a strong impact on the turbulence efficiency. This point emphasizes the role of microphysic effects in the saturation process, and the necessity to modelize these phenomena to get a self-consistent accretion disk transport model.

*Keywords* : Accretion disc, numerical methods, turbulence theory, MHD